Série Analyse pour les EDP

Volume 2

Fonctions continues

—

Morceaux choisis :

Jacques SIMON

Table des matières

Introduction

Objectif. Ce livre est le deuxième des six volumes d'une série dédiée aux outils mathématiques pour la résolution d'équations aux dérivées partielles issues de la physique :

volume 1 : *Espaces de Banach, Fréchet, Hilbert et Neumann*
volume 2 : *Fonctions continues*
volume 3 : *Distributions*
volume 4 : *Espaces de Lebesgue et de Sobolev*
volume 5 : *Traces*
volume 6 : *Équations aux dérivées partielles*

Ce deuxième volume a pour objet l'étude de propriétés des fonctions utiles pour la construction des distributions et l'étude des équations aux dérivées partielles, en particulier la dérivation partielle et de la construction de primitives, qui est son application réciproque.

Public visé. Nous avons cherché des méthodes simples nécessitant le bagage minimal pour rendre cet outil accessible au plus grand nombre — doctorants, étudiants [1] de troisième cycle, ingénieurs — sans en restreindre la généralité… et

1. **Les étudiants ?** Qu'aurais-je pu répondre si l'un de mes étudiants de DEA de 1988 avait voulu des précisions sur le *théorème de dualité de de Rham* auquel je faisais appel pour obtenir la pression dans les équations de Navier–Stokes ? Que ⟪Jacques-Louis LIONS, mon maître, a écrit qu'il résulte du théorème de cohomologie de de Rham, dont je ne comprend ni l'énoncé, ni la démonstration, ni pourquoi il entraîne ce que nous utilisons⟫ ? Déplorable argument d'autorité anti-scientifique.
Ce fut le point de départ de ce travail : écrire des démonstrations que je puisse expliquer à mes étudiants de tout ce que j'utilisais. Il me fallut cinq ans pour trouver la démonstration ⟪élémentaire⟫ du *théorème d'orthogonalité* 9.2, p. 206, sur l'existence de primitives d'un champ q. Le passage de la condition $\int_\Omega q \cdot \psi = 0$ pour tout ψ de divergence nulle à $\oint_\Gamma q \cdot \mathrm{d}\ell = 0$ pour tout lacet Γ m'échappait. Mais

même en généralisant certains résultats, ce qui destine ce livre également aux chercheurs.

Originalité. La construction de primitives, ainsi que l'intégrale de Cauchy et la pondération avec lesquelles elles sont obtenues, sont faites pour une fonction à valeurs dans un *espace de Neumann*, c'est-à-dire dans lequel toute suite de Cauchy converge.

Espaces de Neumann. La complétude séquentielle, qui caractérise ces espaces, est la propriété la plus générale sur E pour que l'intégrale d'une fonction continue à valeurs dans E y appartienne (*cf.* le § 4.3 *Le cas où E n'est pas de Neumann*, p. 100). Elle est plus générale que la complétude, c'est-à-dire la convergence de tous les filtres de Cauchy, qui est fréquemment considérée ; par exemple, si E est un espace de Hilbert de dimension infinie, E-faible est un espace de Neumann mais n'est pas complet [volume 1, propriété (4.11), p. 82].

En outre, la complétude séquentielle est plus simple que la complétude.

Semi-normes. Nous utilisons des familles de semi-normes plutôt que des topologies localement convexes, ce qui est équivalent, pour pouvoir définir la différentiabilité (p. 81) en comparant les semi-normes d'une variation de la variable aux semi-normes des variations de la valeur de l'application. Une *Familiarisation avec les espaces semi-normés* se trouve p. 5. Leur maniement suit celui des espaces normés, la différence principale consistant à travailler sur plusieurs semi-normes et non plus sur une seule norme.

Primitives. Nous montrons qu'un champ continu $q = (q_1, \dots, q_d)$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ a une primitive f, c'est-à-dire que $\nabla f = q$, si et seulement s'il est orthogonal aux champs tests à divergence nulle, c'est-à-dire si $\int_\Omega q \cdot \psi = 0_E$ pour tout champ régulier $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_d)$ tel que $\nabla \cdot \psi = 0$. C'est le *théorème d'orthogonalité* (théorème 9.2).

Lorsque Ω est simplement connexe, pour que q ait une primitive, il faut et il suffit qu'il ait des primitives locales. C'est le *théorème de recollement de primitives locales* (théorème 9.4). Dans un tel ouvert, il faut et il suffit également qu'il vérifie la condition de Poincaré $\partial_i q_j = \partial_j q_i$ pour tout i et j s'il est $\mathcal{C}^1$ (théorème 9.10), ou sa version faible $\int_\Omega q_j \partial_i \varphi = \int_\Omega q_i \partial_j \varphi$ pour toute fonction test φ s'il est continu (théorème 9.11).

Nous déterminons explicitement toutes les primitives (théorème 9.17) et nous en exhibons une qui dépend continûment de q (théorème 9.18).

---

j'en tirai ma plus grande satisfaction mathématique, la construction explicite d'un écoulement tubulaire incompressible, *cf.* p. 196. Vingt-cinq ans plus tard, me voici enfin prêt à répondre à toutes les autres questions de mes étudiants … persévérants.

Intégration. Nous étendons l'intégrale de Cauchy des fonctions uniformément continues aux valeurs dans un espace de Neumann, car c'est un outil essentiel pour la construction des primitives.

Les propriétés obtenues ici pour les fonctions continues serviront également à leur extension aux distributions intégrables, au volume 4, par continuité ou transposition. En effet, un des objectifs de cette série *Analyse pour les edp* est d'étendre l'intégration et les espaces de Sobolev aux valeurs dans un tel espace de Neumann. Mais, pour cela, il nous a paru plus simple de construire d'abord les distributions (au volume 3) avec les seules fonctions continues, puis (au volume 4) les distributions intégrables qui jouent le rôle des habituelles *classes de fonctions intégrables presque partout égales.*

Pondération. La pondérée $f \diamond \mu$ d'une fonction f, définie dans un ouvert Ω, par un poids μ, poids qui est une fonction réelle à support compact D, est une fonction définie dans l'ouvert $\Omega_D = \{x \in \mathbb{R}^d : x + D \subset \Omega\}$ par $(f \diamond \mu)(x) = \int_{\mathring{D}} f(x+y)\,\mu(y)\,\mathrm{d}y$. Elle intervient constamment. Elle joue un rôle analogue à celui joué par la convolution, que l'on retrouve à une symétrie près sur μ, lorsque $\Omega = \mathbb{R}^d$.

Nouveautés. Beaucoup de résultats sont des extensions naturelles de résultats antérieurs, mais les suivants nous semblent mériter l'attention :
— La construction de la topologie de l'espace $\mathcal{K}(\Omega; E)$ des fonctions continues à support compact par les semi-normes $\|f\|_{\mathcal{K}(\Omega;E);q} = \sup_{x\in\Omega} q(x)\|f(x)\|_{E;\nu}$ indexées par $q \in \mathcal{C}^+(\Omega)$ et $\nu \in \mathcal{N}_E$ (définition 1.17). Elle équivaut, en beaucoup plus simple, à la topologie de limite inductive des $\mathcal{C}_K(\Omega; E)$.
— Le fait que, si une fonction $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ vérifie $\sup_{x\in\Omega} q(x)|f(x)| < \infty$ pour tout $q \in \mathcal{C}^+(\Omega)$, alors son support est compact (théorème 1.22). Il est à la base de la définition des semi-normes de $\mathcal{D}(\Omega)$ faite au volume 3.
— Le *théorème de concentration* de l'intégrale et la construction d'un *écoulement tubulaire* incompressible (théorèmes 8.18 et 8.17), points clé de notre construction des primitives d'un champ à valeurs dans un espace de Neumann, *cf.* le commentaire *Utilité du théorème de concentration*, p. 198.

Pré-requis. Les démonstrations dans le corps du texte ne font appel qu'à des définitions et des résultats établis au volume 1 dont les énoncés sont rappelés, dans le texte ou en annexe. Elles sont détaillées en incluant des arguments triviaux pour un connaisseur et les numéros des théorèmes utilisés sont systématiquement rappelés.

Commentaires. Les commentaires composés en petits caractères, contrairement au corps du texte, faire appel à des résultats extérieurs ou non encore établis. L'annexe *Rappels* est, elle aussi, composée en petits caractères, car elle peut être supposée connue.

Historique. L'origine des concepts et des résultats est, autant que possible, précisée en notes [2] de bas de page.

Navigation dans le livre.
— La **table des matières**, en tête du livre, donne la liste des thèmes traités.
— La **table des notations**, p. 251, précise leur sens en cas de doute.
— L'**index**, p. 259, fournit un autre accès thématique.
— Les hypothèses sont, toutes, indiquées au sein des théorèmes eux-mêmes.
— La numérotation est commune à tous les énoncés afin de les retrouver aisément en suivant l'ordre des numéros (ainsi, le théorème 2.9 se trouve entre les énoncés 2.8 et 2.10, qui sont respectivement une définition et un théorème).

Remerciements. Enrique FERNÁNDEZ-CARA m'a suggéré de très nombreuses améliorations des versions successives de ce travail. Jérôme LEMOINE a, lui aussi, bien voulu en relire les innombrables versions et corriger les non moins innombrables coquilles et maladresses qui s'y trouvaient.

Olivier BESSON, Fulbert MIGNOT, Nicolas DEPAUW et Didier BRESCH ont, eux aussi, apporté de nombreuses améliorations, sur la forme comme sur le fond.

Pierre DREYFUSS m'a apporté les éclaircissements sur la nécessité ou non de la simple connexité du domaine pour l'existence de primitives sous la condition de Poincaré qui sont indiqués p. 221, dans le commentaire *Nécessité de la simple connexité pour le recollement de primitives locales*.

Merci, mes amis.

Jacques SIMON
Chapdes-Beaufort, le 30 juin 2019

2. **Appel au lecteur.** Nombre de résultats importants n'ont pas de note historique, car j'en ignore tout. Je sollicite l'indulgence du lecteur pour ces lacunes et, surtout, pour les injustices qu'il pourra relever. Et je fais appel aux érudits pour me signaler les améliorations à apporter... pour les rééditions.

Chapitre 8

Circulation d'un champ de vecteurs sur un chemin

Ce chapitre fournit deux résultats essentiels pour la construction de primitives.
— Le *théorème de concentration* (théorème 8.18), qui montre que, pour tout champ $q = (q_1, \ldots, q_d)$, l'intégrale $\int_\Omega q \cdot \Psi$ est égale à l'intégrale $\fint_\Gamma q \diamond \rho \cdot \mathrm{d}\ell$ concentrée sur le lacet Γ, où Ψ est un *écoulement tubulaire* à divergence nulle construit au théorème 8.18 ayant son support dans un tube d'axe Γ. Ses applications sont indiquées dans le commentaire *Utilité du théorème de concentration*, p. 198.
— Le *théorème d'invariance par homotopie de la circulation d'un gradient local* (théorème 8.20), qui montre que, si un champ q est, dans chaque boule B, de la forme $q = \nabla f_B$, sa circulation $\fint_\Gamma q \cdot \mathrm{d}\ell$ sur un lacet Γ est invariante par homotopie. Ses applications sont indiquées dans le commentaire *Utilité du théorème d'invariance...*, p. 199.

Nous commençons donc par étudier la circulation $\fint_\Gamma q \cdot \mathrm{d}\ell \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int_{t_\mathrm{o}}^{t_\mathrm{e}} (q \circ \Gamma) \cdot \Gamma' \, \mathrm{d}t$ (définition 8.7) d'un champ $q \in \mathcal{C}(\Omega; E^d)$ sur un chemin $\Gamma \in \mathcal{C}^1([t_\mathrm{o}, t_\mathrm{e}]; \mathbb{R}^d)$. En particulier :
— La circulation se recolle (théorème 8.14), c'est-à-dire $\fint_\Gamma = \sum_n \fint_{\Gamma_n}$ si $\Gamma = \overrightarrow{\cup}_n \Gamma_n$.
— On peut reparamétrer tout recollement de chemins $\mathcal{C}^1$, c'est-à-dire tout chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux, en un chemin $\mathcal{C}^1$ (théorème 8.4), sans changer la circulation (théorème 8.16).
— La circulation d'un gradient sur un lacet est nulle (théorème 8.11), c'est-à-dire $\fint_\Gamma \nabla f \cdot \mathrm{d}\ell = 0$.

8.1. Chemins

Définissons les chemins et les lacets d'un espace semi-normé séparé.

Définition 8.1. — *Soit E un espace semi-normé séparé et $U \subset E$.*

(a) *On appelle **chemin** de U toute application $\Gamma \in \mathcal{C}([t_\mathrm{o}, t_\mathrm{e}]; U)$, où $[t_\mathrm{o}, t_\mathrm{e}]$ est un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$.*

*On dit que Γ **relie dans** U l'**origine** $\Gamma(t_\mathrm{o})$ à l'**extrémité** $\Gamma(t_\mathrm{e})$. On appelle **image** de Γ l'ensemble $[\Gamma] = \{\Gamma(t) : t_\mathrm{o} \le t \le t_\mathrm{e}\}$.*

(b) *On appelle* **lacet** *tout chemin dont l'origine et l'extrémité coïncident.*

(c) *On dit qu'un chemin* **est** $\mathcal{C}^1$, *ou* **de classe** $\mathcal{C}^1$, *s'il est de la forme* $\Gamma \in \mathcal{C}^1([t_\mathrm{o}, t_\mathrm{e}]; U)$.

C'est-à-dire (définition 2.26) si la dérivée Γ', *qui n'est* a priori *définie que dans l'ouvert* $]t_\mathrm{o}, t_\mathrm{e}[$, *a un prolongement continu dans* $[t_\mathrm{o}, t_\mathrm{e}]$, *prolongement noté* Γ', *lui aussi.* ▮

Terminologie. Certains auteurs disent chemin *dans* U et non pas *de* U. La définition 8.1 suit la terminologie d'Henri CARTAN [19, p. 215]. □

Géométrie. L'image $[\Gamma]$ d'un chemin $\mathcal{C}^1$ n'est pas nécessairement une coube régulière ou une variété de dimension un. Elle peut par exemple se réduire à un point, se recouper, présenter des angles (entre deux segments, *cf.* théorème 8.4) ou des points de rebroussements... □

Définissons le «chemin parcouru à l'envers», ce qui échange son origine et son extrémité.

Définition 8.2. — *Soit* $\Gamma \in \mathcal{C}([t_\mathrm{o}, t_\mathrm{e}]; E)$ *un chemin d'un espace semi-normé séparé* E. *On appelle chemin* Γ **parcouru à l'envers** *le chemin défini dans* $[-t_\mathrm{e}, -t_\mathrm{o}]$ *par*

$$\overleftarrow{\Gamma}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma(-t).$$ ▮

Recollons deux chemins lorsque l'extrémité de l'un est l'origine de l'autre.

Définition 8.3. — *Soit* $\Gamma_1 \in \mathcal{C}([t_{\mathrm{o}_1}, t_{\mathrm{e}_1}]; E)$ *et* $\Gamma_2 \in \mathcal{C}([t_{\mathrm{o}_2}, t_{\mathrm{e}_2}]; E)$ *deux chemins d'un espace semi-normé séparé* E *tels que*

$$\Gamma_1(t_{\mathrm{e}_1}) = \Gamma_2(t_{\mathrm{o}_2}).$$

Leur **recollement** *est le chemin* $\Gamma_1 \overrightarrow{\cup} \Gamma_2$ *défini sur* $[t_{\mathrm{o}_1}, t_{\mathrm{e}_1} + t_{\mathrm{e}_2} - t_{\mathrm{o}_2}]$ *par :*

$$(\Gamma_1 \overrightarrow{\cup} \Gamma_2)(t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \Gamma_1(t) & \text{si } t_{\mathrm{o}_1} \leq t \leq t_{\mathrm{e}_1}, \\ \Gamma_2(t + t_{\mathrm{o}_2} - t_{\mathrm{e}_1}) & \text{si } t_{\mathrm{e}_1} \leq t \leq t_{\mathrm{e}_1} + t_{\mathrm{e}_2} - t_{\mathrm{o}_2}. \end{cases}$$ ▮

Montrons que l'on peut **reparamétrer** tout recollement de chemins $\mathcal{C}^1$ pour en faire un chemin $\mathcal{C}^1$.

Théorème 8.4. — *Soit* $\Gamma = \overrightarrow{\bigcup}_{1\le n\le N}\Gamma_n$ *le recollement d'un nombre fini de chemins* $\mathcal{C}^1$ *de* $\mathbb{R}^d$*, et soit* $[t_{\mathrm{o}}, t_{\mathrm{e}}]$ *son intervalle de définition.*

Alors, il existe une bijection $T \in \mathcal{C}^1([t_{\mathrm{o}}, t_{\mathrm{e}}])$ *de* $[t_{\mathrm{o}}, t_{\mathrm{e}}]$ *de* Γ *sur lui-même telle que* T' *s'annule à l'origine et à l'extrémité de chaque* Γ_n *et est* > 0 *en dehors de ces points. Pour une telle bijection,*

$$\Gamma\circ T \text{ est un chemin } \mathcal{C}^1. \ \blacksquare$$

Démonstration. Soit $\Lambda \in \mathcal{C}^1([a,b])$ un des morceaux de Γ et

$$T(t) = a + (b-a)\Big(3\Big(\frac{t-a}{b-a}\Big)^2 - 2\Big(\frac{t-a}{b-a}\Big)^3\Big).$$

Sa dérivée, $T'(t) = 6(t-a)/(b-a) - 6((t-a)/(b-a))^2$ est continue et > 0 dans $]a,b[$, et son prolongement par 0 est continu dans $[a,b]$.

D'après le théorème de dérivation d'une fonction composée (théorème 3.12 (c)), $\Lambda\circ T$ est dérivable et $(\Lambda\circ T)'(t) = (\Lambda'\circ T)(t)\,T'(t)$. Ce dernier tend vers 0 quand $t\to a$ ou $t\to b$, puisque $(\Lambda'\circ T)(t)$ reste borné et $T'(t)\to 0$.

En reparamétrant ainsi tous les morceaux Γ_n de Γ, on obtient une fonction $\Gamma\circ T$ qui est continue dans $[t_{\mathrm{o}}, t_{\mathrm{e}}]$, qui est dérivable en dehors des points de raccord des morceaux, et dont la dérivée tend vers 0 en chacun de ces points. Il en résulte (théorème 2.28) que $\Gamma\circ T$ est dérivable en ces points et est continûment dérivable dans $]t_{\mathrm{o}}, t_{\mathrm{e}}[$. Le prolongement par 0 de sa dérivée est continu dans tout $[t_{\mathrm{o}}, t_{\mathrm{e}}]$, c'est-à-dire $\Gamma\circ T \in \mathcal{C}^1([t_{\mathrm{o}}, t_{\mathrm{e}}]; E)$ $\square$

Montrons que les points d'un ouvert connexe sont reliés par des chemins $\mathcal{C}^1$.

Théorème 8.5. — *Toute paire de points d'un ouvert connexe* U *d'un espace semi-normé séparé peut être reliée par un chemin* $\mathcal{C}^1$ *de* U*.* $\blacksquare$

Démonstration. Soit E l'espace considéré, $a\in U$ et X l'ensemble des points de U reliables à a par un chemin $\mathcal{C}^1$ de U. Il s'agit de montrer que $X = U$.

Montrons d'abord que X est ouvert. Soit $x \in X$ et $\{\|\ \|_{E;\nu} : \nu\in\mathcal{N}_E\}$ la famille de semi-normes de E. Par définition A.7 (b) d'un ouvert, ici U, il existe un ensemble fini N de $\mathcal{N}_E$ et $\epsilon > 0$ tels que la boule $B = \{v\in E : \sup_{\nu\in N}\|v-x\|_{E;\nu}\le\epsilon\}$ soit incluse dans U. Comme x est relié à a par un chemin Γ de U de classe $\mathcal{C}^1$, tout point v de B est relié à a par le recollement de Γ au segment $[x,v]$. En reparamétrant ce recollement avec le théorème 8.4, on obtient un chemin $\mathcal{C}^1$ reliant v à x. Donc, $B \subset X$, ce qui prouve que X est ouvert dans E.

De même, son complémentaire $Y = U \setminus X$ est ouvert. En effet, si maintenant $x \in Y$, aucun point de B n'est reliable à a par un chemin $\mathcal{C}^1$ de U, sinon x le serait, donc $B \subset Y$.

Les ouverts X et Y sont disjoints, ils recouvrent U qui est connexe, et X n'est pas vide (puisqu'il contient a). Donc, par définition A.15 d'un ensemble connexe, $Y = \emptyset$, d'où $X = U$. □

Connexité par arcs. Un ensemble est dit **connexe par arcs** si toute paire de ses points peut être reliée par un chemin. Le théorème 8.5 montre un peu plus, puisqu'il donne des chemins $\mathcal{C}^1$. On pourrait obtenir des chemins $\mathcal{C}^\infty$, mais cela ne nous servirait pas. □

Montrons réciproquement que deux points reliés par un chemin appartiennent à la même composante connexe.

Théorème 8.6. — *Si deux points sont reliés par un chemin d'un ensemble U d'un espace semi-normé séparé, alors ils appartiennent à la même composante connexe de U.* ▮

Démonstration. Soit E l'espace considéré et Γ un chemin de U reliant deux points a et b. L'image $[\Gamma]$ de ce chemin est, par définition 8.1, l'image d'un intervalle $[t_\mathrm{o}, t_\mathrm{e}]$ par l'application continue Γ. Tout intervalle étant connexe (théorème A.16), $[\Gamma]$ est donc connexe (théorème A.33). En outre, elle est incluse dans U (par hypothèse) et elle contient $\Gamma(t_\mathrm{o})$, c'est-à-dire a.

La composante connexe engendrée par a étant, par définition A.15, le plus grand ensemble connexe inclus dans U contenant a, elle contient donc $[\Gamma]$ et *a fortiori* $\Gamma(t_\mathrm{e})$, c'est-à-dire b. □

8.2. Circulation d'un champ sur un chemin

Nous appelons **champ de vecteurs** sur une partie de $\mathbb{R}^d$ une fonction ayant d composantes à valeurs dans un espace E, ou, ce qui est équivalent, une fonction à valeurs dans le produit euclidien E^d.

Définissons la circulation [1] sur un chemin $\mathcal{C}^1$ d'un champ de vecteurs à valeurs dans un espace de Neumann.

1. **Historique de la circulation d'un champ sur un chemin.** La circulation d'un champ de vecteurs sur un chemin fut introduite par Gaspard-Gustave de CORIOLIS en 1829 [26] pour exprimer le travail d'une force,

Définition 8.7. — *Soit $q \in \mathcal{C}(\Omega; E^d)$, où $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et E est un espace de Neumann, et soit $\Gamma \in \mathcal{C}^1([t_o, t_e]; \Omega)$ un chemin de Ω. On note Γ' la dérivée de Γ.*

*On appelle **circulation** de q sur Γ l'élément de E défini par*

$$\fint_\Gamma q \cdot \mathrm{d}\ell \overset{\text{def}}{=} \int_{t_o}^{t_e} (q \circ \Gamma) \cdot \Gamma' \,\mathrm{d}t. \blacksquare$$

Notation incohérente ! Pour être conforme à notre notation de l'intégrale de Cauchy, nous devrions ici noter $\int_{t_o}^{t_e} (q \circ \Gamma)(t) \cdot \Gamma'(t) \,\mathrm{d}t$ ou bien $\int_{t_o}^{t_e} (q \circ \Gamma) \cdot \Gamma'$. Nous ajoutons $\mathrm{d}t$ à ce dernier pour faire contrepoint à $\mathrm{d}\ell$. $\square$

Justification. Pour que le second membre soit défini, il faut, par définition 4.9 de l'intégrale de Cauchy à valeurs dans un espace de Neumann, que la fonction $(q \circ \Gamma) \cdot \Gamma'$ soit uniformément continue dans $]t_o, t_e[$.

Or, l'application composée $q \circ \Gamma$ est continue (théorème A.35) dans $[t_o, t_e]$, de même que Γ' (prolongée, par définition 8.1 (c)). Leur produit $(q \circ \Gamma) \cdot \Gamma'$ est donc, lui aussi, continu (théorème A.35, à nouveau) puisqu'on l'obtient en composant par l'application $\cdot$ (qui est continue de $E^d \times \mathbb{R}^d$ dans E d'après l'inégalité (2.2), p. 39). Donc, d'après le théorème de Heine (théorème A.34), $(q \circ \Gamma) \cdot \Gamma'$ est uniformément continue dans le compact $[t_o, t_e]$ et, *a fortiori*, dans $]t_o, t_e[$.

Il faut aussi que $(q \circ \Gamma) \cdot \Gamma'$ ait son support borné, ce qui est le cas puisque $[t_o, t_e]$ est borné, par définition 8.1 (a) d'un chemin. $\square$

Montrons que la circulation change de signe quand on parcourt un chemin à l'envers.

Théorème 8.8. — *Soit $q \in \mathcal{C}(\Omega; E^d)$, où $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et E est un espace de Neumann, et soit Γ un chemin $\mathcal{C}^1$ de Ω. Alors,*

$$\fint_{\overleftarrow{\Gamma}} q \cdot \mathrm{d}\ell = -\fint_\Gamma q \cdot \mathrm{d}\ell. \blacksquare$$

---

c'est-à-dire la variation de l'énergie cinétique d'un corps qui se déplace soumis à cette force. Le nom de *circulation* se réfère à ce déplacement.

Cette notion a été développée dans la théorie des formes différentielles crée vers 1890–1900 par Émile CARTAN [18, tome II, pp. 309–396] et Henri POINCARÉ [63, tome III, chapitre XXII], *cf.* par exemple [CARTAN, Henri, 19, pp. 215–219] (fils d'Émile, cité ci-dessus), où l'on trouve les résultats de nos § 8.2 et 8.3, avec un champ q « caché » derrière une 0-forme ω et ∇f « caché » derrière une 1-forme ω ou $\mathrm{d}g$.

Terminologie anglo-saxonne. Le mot anglais *circulation* est réservé au cas où le chemin est un lacet. Sinon, les Anglais utilisent *line integral*, dont la la traduction mot à mot est « intégrale curviligne », terme que les Français réservent à l'intégrale d'une fonction scalaire.

Démonstration. Par définition 8.2 du chemin parcouru à l'envers et 8.7 de la circulation, on a, puisque $\mathrm{d}(\Gamma(-t))/\mathrm{d}t = -(\mathrm{d}\Gamma/\mathrm{d}t)(-t)$,

$$\fint_{\overleftarrow{\Gamma}} q \cdot \mathrm{d}\ell = \int_{-t_\mathrm{e}}^{-t_\mathrm{o}} q \circ \Gamma(-t) \cdot \frac{\mathrm{d}(\Gamma(-t))}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = -\int_{-t_\mathrm{e}}^{-t_\mathrm{o}} \Big(q \circ \Gamma \cdot \frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t}\Big)(-t)\,\mathrm{d}t.$$

L'intégrale étant invariante par symétrie (théorème 6.18), il vient

$$\fint_{\overleftarrow{\Gamma}} q \cdot \mathrm{d}\ell = -\int_{t_\mathrm{o}}^{t_\mathrm{e}} \Big(q \circ \Gamma \cdot \frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t}\Big)(t)\,\mathrm{d}t = -\fint_{\Gamma} q \cdot \mathrm{d}\ell. \ \Box$$

Montrons que la circulation est invariante par un changement de variable croissant.

Théorème 8.9. — *Soit Γ un chemin $\mathcal{C}^1$ d'un ensemble Ω de $\mathbb{R}^d$ défini dans un intervalle borné $[t_\mathrm{o}, t_\mathrm{e}]$, et soit T une bijection d'un intervalle borné $[t'_\mathrm{o}, t'_\mathrm{e}]$ sur $[t_\mathrm{o}, t_\mathrm{e}]$, telle que :*

$$T \in \mathcal{C}^1([t'_\mathrm{o}, t'_\mathrm{e}]), \ \ T' > 0 \textit{ dans }]t'_\mathrm{o}, t'_\mathrm{e}[.$$

Alors, $\Gamma \circ T$ est un chemin $\mathcal{C}^1$ de Ω et, pour tout $q \in \mathcal{C}(\Omega; E^d)$, où E est un espace de Neumann,

$$\fint_{\Gamma \circ T} q \cdot \mathrm{d}\ell = \fint_{\Gamma} q \cdot \mathrm{d}\ell. \ \blacksquare$$

Démonstration. D'après le théorème de dérivation d'une fonction composée (théorème 3.12 (c)), dans $]t_\mathrm{o}, t_\mathrm{e}[$,

$$(\Gamma \circ T)' = (\Gamma' \circ T)\,T'. \tag{8.1}$$

Le second membre, et donc le premier, est uniformément continu car Γ', T et T' le sont par hypothèse, et donc aussi $\Gamma' \circ T$ (théorème A.35) ainsi que son produit par T' (théorème 3.5 (b)). Il a donc (théorème A.38) un prolongement continu dans $[t'_\mathrm{o}, t'_\mathrm{e}]$. Par définition 8.1 (c) d'un chemin $\mathcal{C}^1$, ceci prouve que $\Gamma \circ T \in \mathcal{C}^1([t'_\mathrm{o}, t'_\mathrm{e}]; \mathbb{R}^d)$.

La définition 8.7 de la circulation s'écrit ici, avec (8.1),

$$\fint_{\Gamma \circ T} q \cdot \mathrm{d}\ell = \int_{t'_\mathrm{o}}^{t'_\mathrm{e}} (q \circ \Gamma \circ T) \cdot (\Gamma \circ T)'\,\mathrm{d}t = \int_{t'_\mathrm{o}}^{t'_\mathrm{e}} (((q \circ \Gamma) \cdot \Gamma') \circ T)\,T'\,\mathrm{d}t.$$

En transformant le dernier membre avec la formule de changement de variable dans une intégrale du théorème 6.14 (c) où, ici, $|\det[\nabla T]| = T'$ (car $\nabla T = T'$ qui est positif, par hypothèse), il vient

$$\fint_{\Gamma \circ T} q \cdot \mathrm{d}\ell = \int_{t_\mathrm{o}}^{t_\mathrm{e}} (q \circ \Gamma) \cdot \Gamma'\,\mathrm{d}t = \fint_{\Gamma} q \cdot \mathrm{d}\ell.$$

Il reste à vérifier que T^{-1} est $\mathcal{C}^1$, car le théorème 6.14 (c) le suppose. Puisque $T' > 0$, le théorème A.55 de dérivation d'une fonction réciproque montre que T^{-1} est continue et dérivable et $(T^{-1})'(t) = 1/(T'(T^{-1}(t)))$. C'est-à-dire, $(T^{-1})' = \mathcal{Q} \circ T' \circ T^{-1}$, où $\mathcal{Q}(x) = 1/x$. Donc, $(T^{-1})'$ est continue comme toute composée d'applications continues (théorème A.35), puisque, outre T' et T^{-1}, $\mathcal{Q}$ est continue (de $]0, \infty[$ dans $\mathbb{R}$, *cf.* théorème A.56). $\square$

Indépendance de la paramétrisation. D'après les théorèmes 8.8 et 8.9, la circulation sur un chemin Γ de classe $\mathcal{C}^1$ ne dépend que de sa géométrie (c'est-à-dire de son image $[\Gamma]$) et de son sens de parcours. $\square$

Circulation sur une courbe. Si l'image $[\Gamma]$ de Γ est une courbe rectifiable,

$$\fint_\Gamma q \cdot \mathrm{d}\ell = \int_{[\Gamma]} q \cdot \tau \, \mathrm{d}\sigma,$$

où $\mathrm{d}\sigma$ est la mesure curviligne de $[\Gamma]$ et τ est son champ de vecteurs unitaire tangent orienté, c'est-à-dire $\tau = \Gamma'/|\Gamma'|$ si Γ est une injection $\mathcal{C}^1$ telle que Γ' ne s'annule pas. $\square$

Calculons la circulation sur un chemin réduit à un point ou sur un chemin rectiligne.

Théorème 8.10. — *Soit $q \in \mathcal{C}(\Omega; E^d)$, où $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et E est un espace de Neumann, et soit a et x deux points de Ω tels que $[a, x] \subset \Omega$. Alors :*

(a) *Si $\Gamma_{\{a\}}$ est le chemin défini dans $[0, 1]$ par $\Gamma_{\{a\}}(t) = a$,*

$$\fint_{\Gamma_{\{a\}}} q \cdot \mathrm{d}\ell = 0_E.$$

(b) *Si $\Gamma_{\overrightarrow{a,x}}$ est le* ***chemin rectiligne*** *défini dans $[0, 1]$ par $\Gamma_{\overrightarrow{a,x}}(t) = a + t(x - a)$,*

$$\fint_{\Gamma_{\overrightarrow{a,x}}} q \cdot \mathrm{d}\ell = (x - a) \cdot \int_0^1 q(a + t(x - a)) \, \mathrm{d}t. \blacksquare$$

Démonstration. On utilise la définition 8.7 de la circulation et, respectivement, les égalités $\mathrm{d}a/\mathrm{d}t = 0$ et $\mathrm{d}(a + t(x - a))/\mathrm{d}t = x - a$. $\square$

Calculons la **circulation d'un gradient**.

Théorème 8.11. — *Soit $f \in \mathcal{C}^1(\Omega; E)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et E est un espace de Neumann, et soit Γ un chemin $\mathcal{C}^1$ de Ω. Alors :*

(a) *Si* Γ *relie* a *à* b*,*

$$\fint_\Gamma \nabla f \cdot \mathrm{d}\ell = f(b) - f(a).$$

(b) *Si* Γ *est un lacet,*

$$\fint_\Gamma \nabla f \cdot \mathrm{d}\ell = 0_E. \blacksquare$$

Démonstration. (a) D'après la formule de changement de variable dans une dérivée du théorème 3.12 (a) avec $\ell = 1$ et $\partial_i = \mathrm{d}/\mathrm{d}t$,

$$(f \circ \Gamma)' = \sum_{j=1}^{d} (\partial_j f \circ \Gamma)\, \Gamma_j' = (\nabla f \circ \Gamma) \cdot \Gamma'.$$

La définition 8.7 de la circulation donne donc, avec l'expression de l'intégrale d'une dérivée (théorème 6.4 (b)),

$$\fint_\Gamma \nabla f \cdot \mathrm{d}\ell = \int_{t_\mathrm{o}}^{t_\mathrm{e}} (\nabla f \circ \Gamma) \cdot \Gamma' \, \mathrm{d}t = \\ = \int_{t_\mathrm{o}}^{t_\mathrm{e}} (f \circ \Gamma)' \, \mathrm{d}t = (f \circ \Gamma)(t_\mathrm{e}) - (f \circ \Gamma)(t_\mathrm{o}).$$

(b) Ceci résulte de (a), car $\Gamma(t_\mathrm{e}) = \Gamma(t_\mathrm{o})$ par définition 8.1 (b) d'un lacet. $\square$

Montrons que la circulation d'un champ de vecteurs dépend continûment de celui-ci.

Théorème 8.12. — *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$*,* E *un espace de Neumann et* Γ *un chemin* $\mathcal{C}^1$ *de* Ω*. Alors :*

(a) *Pour tout* $q \in \mathcal{C}(\Omega; E^d)$ *et toute semi-norme* $\| \ \|_{E;\nu}$ *de* E*,*

$$\Big\| \fint_\Gamma q \cdot \mathrm{d}\ell \Big\|_{E;\nu} \le \gamma \, |t_\mathrm{e} - t_\mathrm{o}| \sup_{x \in [\Gamma]} \|q(x)\|_{E^d;\nu},$$

où $[\Gamma] = \{\Gamma(t) : t_\mathrm{o} < t < t_\mathrm{e}\}$ *et* $\gamma = \sup_{t_\mathrm{o} < t < t_\mathrm{e}} |\Gamma'(t)| < \infty$.

(b) *L'application* $q \mapsto \fint_\Gamma q \cdot \mathrm{d}\ell$ *est linéaire continue de* $\mathcal{C}(\Omega; E^d)$ *dans* E*.* $\blacksquare$

Démonstration. (a) La définition 8.7 de la circulation et la majoration des semi-normes de l’intégrale du théorème 4.15 donnent

$$\Big\| \int_\Gamma q \cdot \mathrm{d}\ell \Big\|_{E;\nu} = \Big\| \int_{t_o}^{t_e} (q \circ \Gamma) \cdot \Gamma' \, \mathrm{d}t \Big\|_{E;\nu} \leq$$
$$\leq |t_e - t_o| \sup_{t_o < t < t_e} \|((q \circ \Gamma) \cdot \Gamma')(t)\|_{E;\nu} \leq \gamma \, |t_e - t_o| \sup_{x \in [\Gamma]} \|q(x)\|_{E^d;\nu},$$

où $\gamma = \sup_{t_o < t < t_e} |\Gamma'(t)|$. Ce dernier est fini puisque Γ' a un prolongement continu dans $[t_o, t_e]$ (par définition 8.1 (c) d’un chemin $\mathcal{C}^1$) et puisque toute fonction continue dans un compact est bornée (théorème A.34).

(b) Par définition 1.3 (a) des semi-normes de $\mathcal{C}(\Omega; E^d)$, l’inégalité ci-dessus s’écrit

$$\Big\| \int_\Gamma q \cdot \mathrm{d}\ell \Big\|_{E;\nu} \leq c \sup_{x \in [\Gamma]} \|q(x)\|_{E^d;\nu} = c \, \|q\|_{\mathcal{C}(\Omega;E^d);[\Gamma],\nu},$$

ce qui entraîne la continuité énoncée d’après la caractérisation des applications linéaires continues du théorème 1.25. □

8.3. Circulation sur un recollement de chemins

Définissons les chemins $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Définition 8.13. — *On dit qu’un chemin est $\mathcal{C}^1$* ***par morceaux*** *si c’est un recollement d’un nombre fini de chemins $\mathcal{C}^1$.* ▮

Montrons que la circulation sur un recollement qui est $\mathcal{C}^1$ est la somme des circulations sur les morceaux.

Théorème 8.14. — *Soit $q \in \mathcal{C}(\Omega; E^d)$, où $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et E est un espace de Neumann, et soit $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_N$ et Γ des chemins $\mathcal{C}^1$ de Ω tels que*

$$\Gamma = \overrightarrow{\bigcup_{1 \leq n \leq N}} \Gamma_n.$$

Alors,

$$\int_\Gamma q \cdot \mathrm{d}\ell = \sum_{1 \leq n \leq N} \int_{\Gamma_n} q \cdot \mathrm{d}\ell.$$ ▮

Démonstration. Par définition 8.7 de la circulation, il s'agit de montrer que

$$\int_{t_o}^{t_e} (q \circ \Gamma) \cdot \Gamma' \,\mathrm{d}t = \sum_{1 \leq n \leq N} \int_{t_{o_n}}^{t_{e_n}} (q \circ \Gamma) \cdot \Gamma' \,\mathrm{d}t.$$

Ceci résulte de la relation de Chasles (Theorem 6.2) puisque, par définition 8.3 du recollement de chemins, $t_o = t_{o_1} \ldots < t_{e_n} = t_{o_{n+1}} < \ldots t_{e_N} = t_e$. $\square$

Étendons cette propriété aux champs $\mathcal{C}^1$ par morceaux qui ne sont pas nécessairement $\mathcal{C}^1$ dans leur ensemble, en en faisant la définition de la circulation sur un tel chemin.

Définition 8.15. — *Soit $q \in \mathcal{C}(\Omega; E^d)$, où $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et E est un espace de Neumann, et considérons un chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux de Ω,*

$$\Gamma = \overrightarrow{\bigcup_{1 \leq n \leq N}} \Gamma_n.$$

*La **circulation** de q sur Γ est l'élément de E défini par*

$$\int_\Gamma q \cdot \mathrm{d}\ell \overset{\text{def}}{=} \sum_{1 \leq n \leq N} \int_{\Gamma_n} q \cdot \mathrm{d}\ell. \blacksquare$$

Justification. La notation $\int_\Gamma q \cdot \mathrm{d}\ell$ est loisible car, lorsque Γ est $\mathcal{C}^1$, on retrouve la circulation de la définition 8.7, d'après le théorème 8.14.

Cette définition est encore loisible pour un chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux, car la circulation ne dépend pas du découpage de Γ en morceaux $\mathcal{C}^1$, bien qu'il y ait une infinité de découpages possibles. En effet, elle est égale à la circulation relative au découpage *minimal*, qui est unique. Plus précisément, définissons $t_1 = t_o$ puis, par récurrence, t_{i+1} comme le grand nombre réel tel que la restriction Λ_i de Γ à $[t_i, t_{i+1}]$ soit $\mathcal{C}^1$. Ceci, jusqu'à ce que $t_{I+1} = t_e$. Alors,

$$\Gamma = \overrightarrow{\bigcup_{1 \leq i \leq I}} \Lambda_i.$$

Ce découpage, dit *minimal*, ne dépend que de Γ, pas de son découpage initial en Γ_n. La circulation est bien indépendante du découpage, car, pour tout $i \in [\![1, I]\!]$, il existe $n_i \in \mathbb{N}$ tel que $\Lambda_i = \overrightarrow{\bigcup}_{n_i \leq n < n_{i+1}} \Gamma_n$ et, d'après le théorème 8.14,

$$\sum_{1 \leq n \leq N} \int_{\Gamma_n} q \cdot \mathrm{d}\ell = \sum_{1 \leq i \leq I} \sum_{n_i \leq n < n_{i+1}} \int_{\Gamma_n} q \cdot \mathrm{d}\ell = \sum_{1 \leq i \leq I} \int_{\Lambda_i} q \cdot \mathrm{d}\ell. \ \square$$

Montrons que le reparamétrage d'un chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux pour en faire un chemin $\mathcal{C}^1$ ne change pas la circulation.

Théorème 8.16. — *Soit $q \in \mathcal{C}(\Omega; E^d)$, où $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et E est un espace de Neumann, et un chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux de Ω,*

$$\Gamma = \overrightarrow{\bigcup_{1 \le n \le N}} \Gamma_n .$$

Soit T un reparamétrage de Γ qui en fait un chemin $\mathcal{C}^1$, c'est-à-dire que T est une bijection de l'intervalle de définition de Γ sur lui-même donnée par le théorème 8.4. Alors,

$$\int_{\Gamma \circ T} q \cdot \mathrm{d}\ell = \int_{\Gamma} q \cdot \mathrm{d}\ell$$

et, pour tout $n \in [\![1, N]\!]$,

$$\int_{\Gamma_n \circ T} q \cdot \mathrm{d}\ell = \int_{\Gamma_n} q \cdot \mathrm{d}\ell. \blacksquare$$

Démonstration. Pour chaque morceau Γ_n de Γ, le théorème 8.9 de changement de variable dans la circulation sur un chemin $\mathcal{C}^1$ donne, puisque T est $\mathcal{C}^1$ dans $[t_{\mathrm{o}_n}, t_{\mathrm{e}_n}]$ et $T' > 0$ dans $]t_{\mathrm{o}_n}, t_{\mathrm{e}_n}[$,

$$\int_{\Gamma_n \circ T} q \cdot \mathrm{d}\ell = \int_{\Gamma_n} q \cdot \mathrm{d}\ell.$$

Puisque $\Gamma \circ T$ est le recollement des $\Gamma_n \circ T$, la définition 8.15 de la circulation sur un chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux donne

$$\int_{\Gamma \circ T} q \cdot \mathrm{d}\ell = \sum_n \int_{\Gamma_n \circ T} q \cdot \mathrm{d}\ell = \sum_n \int_{\Gamma_n} q \cdot \mathrm{d}\ell = \int_{\Gamma} q \cdot \mathrm{d}\ell. \ \square$$

8.4. Écoulement tubulaire et théorème de concentration

Construisons un champ test à divergence nulle et à support dans un voisinage tubulaire d'un chemin [2].

Par définition, la **divergence** [3] de ψ est $\nabla \cdot \psi = \partial_1 \psi_1 + \cdots \partial_d \psi_d$.

2. **Historique de la construction de l'écoulement tubulaire.** Le champ à divergence nulle Ψ du théorème 8.17 a été obtenu par Jacques SIMON en 1993 [70, lemme, p. 1170], en construisant un écoulement incompressible concentré $\vec{\delta}_\Gamma$ puis en le régularisant, comme cela est expliqué dans le commentaire *Idée sous-jacente : l'écoulement concentré*, qui se trouve page suivante.
La construction du champ incompressible concentré a également été faite par Stanislav Konstantinovitch SMIRNOV en 1993 [76, p. 842], pour, inversement, décomposer tout champ incompressible ψ en une intégrale $\psi = \int_\mu \vec{\delta}_{\Gamma_\mu} \mathrm{d}\mu$ de champs concentrés.

3. **Historique de la divergence.** Le terme *divergence* fut introduit par William Kingdon CLIFFORD, en 1878 [24].

Théorème 8.17. — *Soit $\mathcal{T} = [\Gamma] + B$, un* ***tube****, où $\Gamma \in \mathcal{C}^1([t_o, t_e]; \mathbb{R}^d)$ est un lacet de $\mathbb{R}^d$, $[\Gamma] = \{\Gamma(t) : t_o \le t \le t_e\}$ est son image et B est un compact de $\mathbb{R}^d$. Soit de plus $\rho \in \mathcal{C}^\infty_B(\mathbb{R}^d)$.*

On définit $\Psi \in \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{T}}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$, qu'on appelle ***écoulement tubulaire****, par*

$$\Psi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_o}^{t_e} \rho(x - \Gamma(t))\, \Gamma'(t)\, \mathrm{d}t.$$

Il vérifie

$$\nabla \cdot \Psi = 0. \blacksquare$$

Terminologie. Nous parlons d'**écoulement tubulaire** car Ψ est le champ de vitesse d'un écoulement incompressible (puisque sa divergence est nulle) à support dans le tube $\mathcal{T}$ d'axe $[\Gamma]$, *cf.* la figure page suivante. Cet écoulement est immobile hors de $\mathcal{T}$ et son flux à travers une section S de $\mathcal{T}$, orientée comme Γ, est égal à 1. $\square$

Utilité d'un écoulement tubulaire. Sa construction est un point clé, *via* le *théorème de concentration* 8.18, de nos constructions de primitives, *cf.* le commentaire *Utilité* ..., p. 198. $\square$

Idée sous-jacente : l'écoulement concentré. La fonction Ψ est la régularisée $\vec{\delta}_\Gamma \diamond \rho$ de la distribution $\vec{\delta}_\Gamma \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$, de support $[\Gamma]$, définie, pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$, par

$$\langle \vec{\delta}_\Gamma, \phi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Gamma \phi \cdot \mathrm{d}\ell.$$

Cette distribution représente un écoulement incompressible «concentré» sur $[\Gamma]$. Si $[\Gamma]$ est une courbe régulière, le «vecteur concentré» $\vec{\delta}_\Gamma$ est, en chaque point de cette courbe, «égal» au vecteur tangent orienté comme celle-ci.

Cette distribution $\vec{\delta}_\Gamma$ est à divergence nulle, c'est-à-dire $\nabla \cdot \vec{\delta}_\Gamma = 0$, car

$$\langle \nabla \cdot \vec{\delta}_\Gamma, \varphi \rangle = -\langle \vec{\delta}_\Gamma, \nabla\varphi \rangle = -\int_\Gamma \nabla\varphi \cdot \mathrm{d}\ell = 0,$$

puisque la circulation d'un gradient sur un lacet est toujours nulle (théorème 8.11 (b)). Le champ $\Psi = \vec{\delta}_\Gamma \diamond \rho$ est donc, lui aussi, à divergence nulle, puisque

$$\nabla \cdot \Psi = \nabla \cdot (\vec{\delta}_\Gamma \diamond \rho) = (\nabla \cdot \vec{\delta}_\Gamma) \diamond \rho = 0. \ \square$$

Démonstration du théorème 8.17. *Régularité de* Ψ. Sa définition peut s'écrire

$$\Psi(x) = L(R(x)),$$

où, pour tout $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$,

$$L(g) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{t_o}^{t_e} g(-\Gamma(t))\, \Gamma'(t)\, \mathrm{d}t,$$

et où $R(x)(y) = \rho(x + y)$, c'est-à-dire $R(x) = \tau_{-x}\rho$ où τ_x est la translation.

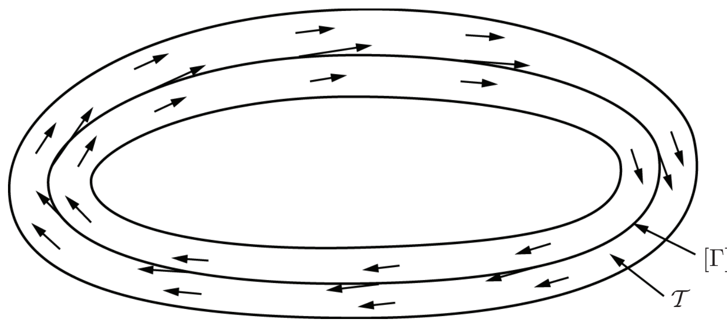

Figure 8.1. *Écoulement tubulaire à divergence nulle, dans le tube $\mathcal{T}$ d'axe $[\Gamma]$*

D'après la majoration des semi-normes (ici, la norme de $\mathbb{R}$) de l'intégrale du théorème 4.15 et la définition 1.3 (b) des semi-normes (ici réduites à une norme) de $\mathcal{C}_\mathrm{b}(\mathbb{R}^d)$,

$$|L(g)| \leq |t_\mathrm{e} - t_\mathrm{o}| \sup_{y\in\mathbb{R}^d} |g(y)| \sup_{t_\mathrm{o}\leq t\leq t_\mathrm{e}} |\Gamma'(t)| = \gamma \,\|g\|_{\mathcal{C}_\mathrm{b}(\mathbb{R}^d)},$$

où γ ne dépend que de Γ. Ce qui, d'après la caractérisation des applications linéaires continues du théorème 1.25, entraîne $L \in \mathcal{L}(\mathcal{C}_\mathrm{b}(\mathbb{R}^d); \mathbb{R}^d)$. Or, $R \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d; \mathcal{C}_\mathrm{b}(\mathbb{R}^d))$, d'après les propriétés de dérivation de la translation du théorème 3.18 (d), puisque $\rho \in \mathcal{K}^\infty(\mathbb{R}^d)$, par hypothèse. L'application composée $L \circ R$, c'est-à-dire Ψ, appartient donc (théorème 3.2) à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$.

Support de Ψ. Si $x \notin [\Gamma] + B$, alors, pour tout $t \in [t_\mathrm{o}, t_\mathrm{e}]$, on a $x - \Gamma(t) \notin B$, d'où $\rho(x - \Gamma(t)) = 0$, et donc $\Psi(x) = 0$. Le support de Ψ est donc inclus dans le tube $\mathcal{T} = [\Gamma] + B$, qui est compact (comme toute somme de compacts de $\mathbb{R}^d$, *cf.* théorème A.24).

Divergence de Ψ. Soit $x \in \mathbb{R}^d$. Chaque application L_i, étant linéaire continue de $\mathcal{C}_\mathrm{b}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathbb{R}$, commute avec la dérivée partielle ∂_i d'après le théorème 3.1, donc

$$\sum_{i=1}^{d} \partial_i \Psi_i(x) = \sum_{i=1}^{d} \partial_i(L_i(R(x))) = \sum_{i=1}^{d} L_i(\partial_i(R(x))) =$$
$$= \int_{t_\mathrm{o}}^{t_\mathrm{e}} \sum_{i=1}^{d} \partial_i \rho(x - \Gamma(t))\, \Gamma_i'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t_\mathrm{o}}^{t_\mathrm{e}} \nabla r(\Gamma(t)) \cdot \Gamma'(t)\,\mathrm{d}t,$$

où $r(y) = -\rho(x - y)$. Le second membre est la définition 8.7 de la circulation de ∇r sur le lacet Γ, donc (théorème 8.11 (b)) il est nul. C'est-à-dire,

$$(\nabla \cdot \Psi)(x) = \oint_\Gamma \nabla r \cdot \mathrm{d}\ell = 0. \ \square$$

Montrons que, pour tout champ q, l'intégrale $\int_\Omega q \cdot \Psi$ est égale à l'intégrale $\fint_\Gamma q \diamond \rho \cdot \mathrm{d}\ell$, qui est «concentrée» sur Γ. Ce que nous appelons le **théorème de concentration** [4].

Théorème 8.18. — *Soit $q \in \mathcal{C}(\Omega; E^d)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et E est un espace de Neumann.*

Soit $\mathcal{T} = [\Gamma] + B$ un tube inclus dans Ω, où Γ est un lacet $\mathcal{C}^1$ de Ω et B est un compact de $\mathbb{R}^d$, $\rho \in \mathcal{C}^\infty_B(\mathbb{R}^d)$ et $\Psi \in \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{T}}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ l'écoulement tubulaire donné par le théorème 8.17. Alors,

$$\int_\Omega q(x) \cdot \Psi(x)\,\mathrm{d}x = \fint_\Gamma q \diamond \rho \cdot \mathrm{d}\ell. \blacksquare$$

Utilité du théorème de concentration. Le théorème 8.18 est un *point clé* de notre démonstration du *théorème d'orthogonalité* 9.2, c'est-à-dire de la construction d'une primitive d'un champ q, à valeurs dans un espace de Neumann, orthogonal aux champs tests à divergence nulle. En effet, c'est le théorème de concentration qui permet de déduire de la condition d'orthogonalité $\int_\Omega q \cdot \psi = 0_E$ la condition $\fint_\Gamma q \cdot \mathrm{d}\ell = 0_E$ pour tout lacet Γ avec laquelle on sait construire explicitement une primitive, *cf.* l'égalité (9.4), p. 207. $\square$

Démonstration du théorème 8.18. La définition de Ψ donne, en permutant les variables grâce au théorème 6.5,

$$\int_\Omega q(x) \cdot \Psi(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \sum_{i=1}^d q_i(x) \Big(\int_{t_\mathrm{o}}^{t_\mathrm{e}} \rho(x - \Gamma(t))\, \Gamma_i'(t)\,\mathrm{d}t \Big)\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int_{t_\mathrm{o}}^{t_\mathrm{e}} \sum_{i=1}^d \Big(\int_\Omega q_i(x)\, \rho(x - \Gamma(t))\,\mathrm{d}x \Big) \Gamma_i'(t)\,\mathrm{d}t.$$

C'est-à-dire, avec l'expression de la pondérée du théorème 7.2 (c) et la définition 8.7 de la circulation,

$$\int_\Omega q(x) \cdot \Psi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{t_\mathrm{o}}^{t_\mathrm{e}} \sum_{i=1}^d (q_i \diamond \rho)(\Gamma(t))\, \Gamma_i'(t)\,\mathrm{d}t =$$
$$= \int_{t_\mathrm{o}}^{t_\mathrm{e}} (q \diamond \rho)(\Gamma(t)) \cdot \Gamma'(t)\,\mathrm{d}t = \fint_\Gamma q \diamond \rho \cdot \mathrm{d}\ell. \square$$

4. **Historique du théorème de concentration.** Le théorème 8.18 a été établi, pour un espace E de Banach, par Jacques SIMON en 1993 [72, p. 207, dernière égalité].

8.5. Invariance par homotopie de la circulation d'un gradient local

Définissons les homotopies.

Définition 8.19. — *Soit U un ensemble d'un espace semi-normé séparé.*

*Deux lacets Γ et Γ_* de U, définis sur un même intervalle $[t_\mathrm{o}, t_\mathrm{e}]$, sont dits **homotopes** dans U si on peut passer de l'un à l'autre par une déformation continue. C'est-à-dire s'il existe $H \in \mathcal{C}([t_\mathrm{o}, t_\mathrm{e}] \times [0,1]; U)$ tel que, pour tout $t \in [t_\mathrm{o}, t_\mathrm{e}]$ et $s \in [0,1]$,*

$$H(t,0) = \Gamma(t), \quad H(t,1) = \Gamma_*(t), \quad H(t_\mathrm{o}, s) = H(t_\mathrm{e}, s).$$

*On appelle **image** de H l'ensemble $[H] = \{H(t,s) : t_\mathrm{o} \le t \le t_\mathrm{e},\ 0 \le s \le 1\}$.* ▮

Montrons que, si un champ est localement un gradient, sa circulation sur les lacets est invariante par homotopie, ce que nous appelons le **théorème d'invariance par homotopie de la circulation d'un gradient local** [5].

Théorème 8.20. — *Soit $q \in \mathcal{C}(\Omega; E^d)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et E un espace de Neumann, tel que, pour toute boule ouverte $B \Subset \Omega$, il existe $f_B \in \mathcal{C}^1(B; E)$ tel que :*

$$\nabla f_B = q \text{ dans } B.$$

Alors, si Γ et Γ_* sont deux lacets $\mathcal{C}^1$ homotopes dans Ω,

$$\oint_\Gamma q \cdot \mathrm{d}\ell = \oint_{\Gamma_*} q \cdot \mathrm{d}\ell. \ ▮$$

Utilité du théorème d'invariance par homotopie de la circulation d'un gradient local. Le théorème 8.20 est un point clé des démonstrations des résultats d'existence de primitives dans un ouvert simplement connexe, *via* le *théorème de recollement de primitives locales* (théorème 9.4) :
— Primitive d'un champ de fonctions $\mathcal{C}^1$ satisfaisant la condition de Poincaré (théorème 9.10), ou d'un champ seulement continu vérifiant cette condition affaiblie (théorème 9.11).
— Fonction de courant d'un champ bidimensionnel à divergence nulle (théorème 9.12). □

5. **Historique du théorème d'invariance par homotopie de la circulation d'un gradient local.** Nous ignorons l'origine du théorème 8.20, qui est classique en théorie des formes différentielles à valeurs dans un espace de Banach, *cf.* par exemple [CARTAN, Henri, 19, théorème 3.7.3, p. 229], où le champ q est «caché» derrière la 1-forme ω et l'existence de f_B telle que ∇f_B est l'hypothèse «ω est fermée».

Démonstration du théorème 8.20. Lacets intermédiaires. Quitte à changer le paramétrage de Γ et Γ_* avec le théorème 8.9, on peut supposer qu'ils sont définis sur $[0,1]$. Soit alors H une homotopie de Γ et Γ_* dans Ω, c'est-à-dire $H \in \mathcal{C}([0,1]\times[0,1];\Omega)$ tel que, pour tout t et s dans $[0,1]$,

$$H(t,0)=\Gamma(t), \quad H(t,1)=\Gamma_*(t), \quad H(0,s)=H(1,s).$$

On définit $N+1$ lacets $\Gamma_n \in \mathcal{C}([0,1];\Omega)$, où $n \in [\![0,N]\!]$, par

$$\Gamma_n(t) \stackrel{\text{def}}{=} H\Big(t, \frac{n}{N}\Big).$$

On découpe chacun d'eux en N morceaux $\Gamma_n^m \in \mathcal{C}([m/N,(m+1)/N];\Omega)$, où $m \in [\![0,N-1]\!]$, définis par $\Gamma_n^m(t) \stackrel{\text{def}}{=} H(t,n/N)$, donc, *cf.* figure 8.2, page suivante,

$$\Gamma_n = \Gamma_n^0 \overrightarrow{\cup} \Gamma_n^1 \overrightarrow{\cup} \ldots \overrightarrow{\cup} \Gamma_n^{N-1}.$$

Enfin, on définit des points intermédiaires a_n^m, où $n \in [\![0,N]\!]$ et $m \in [\![0,N]\!]$, par

$$a_n^m \stackrel{\text{def}}{=} H\Big(\frac{m}{N}, \frac{n}{N}\Big)$$

et on note $T_n^m \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma_{\overrightarrow{a_n^m, a_{n+1}^m}}$ le chemin rectiligne *transversal* reliant a_n^m à a_{n+1}^m.

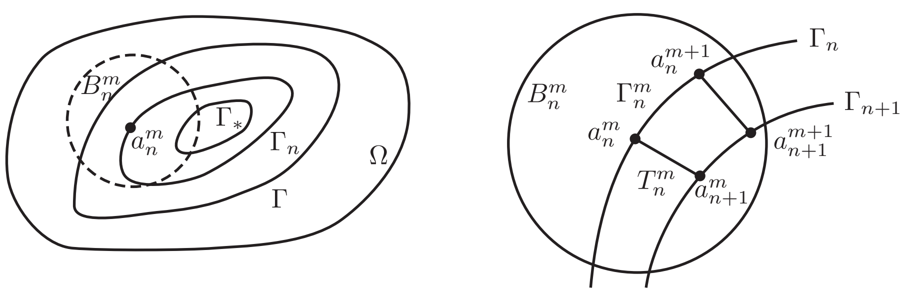

Figure 8.2. *Lacets intermédiaires*

L'image $[H] = \{H(t,s) : 0 \le t \le 1,\ 0 \le s \le 1\}$ est compacte, comme toute image d'un compact, ici $[0,1]\times[0,1]$, par une application continue (théorème A.33). Donc, d'après le théorème d'inclusion forte (théorème A.22), il existe $\delta > 0$ tel que

$$[H] + B(0,\delta) \subset \Omega.$$

Choisissons N assez grand pour que $|t-t'| \le 1/N$ et $|s-s'| \le 1/N$ entraînent $|H(t,s) - H(t',s')| \le \delta/3$, et soit B_n^m la boule ouverte de centre a_n^m et de rayon $2\delta/3$. Alors,

$$\text{les chemins } \Gamma_n^m, \Gamma_{n+1}^m, T_n^m \text{ et } T_n^{m+1} \text{ sont inclus dans } B_n^m.$$

Invariance de la circulation sur les Γ_n. Par hypothèse, il existe une fonction $f_n^m \in \mathcal{C}^1(B_n^m; E)$ telle que

$$q = \nabla f_n^m \text{ dans } B_n^m.$$

Le calcul de la circulation d'un gradient (théorème 8.11 (a)) donne

$$\fint_{\Gamma_{n+1}^m} q \cdot \mathrm{d}\ell - \fint_{\Gamma_n^m} q \cdot \mathrm{d}\ell = \fint_{\Gamma_{n+1}^m} \nabla f_n^m \cdot \mathrm{d}\ell - \fint_{\Gamma_n^m} \nabla f_n^m \cdot \mathrm{d}\ell =$$
$$= \big(f_n^m(a_{n+1}^{m+1}) - f_n^m(a_{n+1}^m)\big) - \big(f_n^m(a_n^{m+1}) - f_n^m(a_n^m)\big) =$$
$$= \fint_{T_n^{m+1}} q \cdot \mathrm{d}\ell - \fint_{T_n^m} q \cdot \mathrm{d}\ell.$$

En sommant en m de 0 à $N-1$, il vient

$$\fint_{\Gamma_{n+1}} q \cdot \mathrm{d}\ell - \fint_{\Gamma_n} q \cdot \mathrm{d}\ell = \fint_{T_n^N} q \cdot \mathrm{d}\ell - \fint_{T_n^0} q \cdot \mathrm{d}\ell.$$

Le second membre est nul, car les chemins T_n^N et T_n^0 coïncident. En effet, T_n^0 relie les origines a_n^0 et a_{n+1}^0 de Γ_n et Γ_{n+1}, tandis que T_n^N relie leurs extrémités a_n^N et a_{n+1}^N, et ces extrémités coïncident avec les origines, puisque

$$a_n^0 = H\Big(0, \frac{n}{N}\Big) = H\Big(1, \frac{n}{N}\Big) = a_n^N,$$

et, de même, $a_{n+1}^0 = a_{n+1}^N$. Donc,

$$\fint_{\Gamma_{n+1}} q \cdot \mathrm{d}\ell - \fint_{\Gamma_n} q \cdot \mathrm{d}\ell = 0_E.$$

Ceci est vrai pour chaque n, donc

$$\fint_{\Gamma_N} q \cdot \mathrm{d}\ell = \fint_{\Gamma_0} q \cdot \mathrm{d}\ell.$$

Ce qui donne le résultat énoncé, puisque $\Gamma_0 = \Gamma$ et $\Gamma_N = \Gamma_*$. $\square$

Formule de Stokes. Le théorème 8.20 d'invariance par homotopie est un avatar (non élémentaire) de la formule de Stokes [6]

$$\int_{\partial H} \sigma = \int_H \mathrm{d}\sigma,$$

6. **Historique de la formule de Stokes.** Nous n'avons pas trouvé de référence précise sur l'origine de cette formule. Attribuée à Sir George Gabriel STOKES, elle aurait été découverte par Mikhail Vasilyevitch OSTROGRADSKY vers 1820, puis redécouverte par Lord KELVIN. On la trouve également sous les noms de Carl Friedrich GAUSS ou de George GREEN, et sous des formes diverses, dont celle du théorème 10.8.

où σ est une k-forme différentielle extérieure et H est une $k{+}1$-chaine, qui se trouve, par exemple, dans [BOURBAKI, 15, § 11.3.4, p. 49], pour σ à valeurs dans un espace de Banach E.

En effet, l'hypothèse $\nabla f_B = q$ donne $\partial_i q_j = \partial_i \partial_j f_B = \partial_j \partial_i f_B = \partial_j q$, donc la 1-forme différentielle $\sigma = \Sigma_j q_j \, \mathrm{d}x_j$ vérifie

$$\mathrm{d}\sigma = \Sigma_{ij} \partial_i q_j \, \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = \Sigma_{i<j} (\partial_i q_j - \partial_j q_i) \, \mathrm{d}x_i \wedge \mathrm{d}x_j = 0_E.$$

Une homotopie H de Γ sur Γ_* étant une 2-chaine orientée de bord $\partial H = \overrightarrow{\Gamma} \cup \overleftarrow{\Gamma_*}$, il en résulte

$$⨍_\Gamma q \cdot \mathrm{d}\ell - ⨍_{\Gamma_*} q \cdot \mathrm{d}\ell = ⨍_{\partial H} \sigma = ⨍_H \mathrm{d}\sigma = 0_E. \ \square$$

Chapitre 9

Primitives de fonctions continues

L'objet de ce chapitre est de déterminer sous quelles conditions un champ continu $q = (q_1, \ldots, q_d)$ a une primitive f, c'est-à-dire $\nabla f = q$.

Nous commençons par construire explicitement une primitive lorsque $\oint_\Gamma q \cdot \mathrm{d}\ell = 0$ pour tout lacet Γ de Ω (théorème 9.1), en intégrant q sur des chemins. Nous en déduisons qu'il suffit que q soit orthogonal aux champs tests à divergence nulle, c'est-à-dire que $\int_\Omega q \bullet \psi = 0$ pour tout ψ tel que $\nabla \bullet \psi = 0$ (théorème 9.2), en utilisant un écoulement tubulaire comme champ test et sa propriété de concentration de l'intégrale. C'est le *théorème d'orthogonalité*. Ces conditions sont nécessaires et suffisantes.

Nous montrons ensuite que, lorsque Ω est simplement connexe, il suffit qu'il existe une primitive dans toute boule $B \subset \Omega$ (théorème 9.4), grâce au théorème d'invariance par homotopie de la circulation. C'est le *théorème de recollement de primitives locales*. Nous construisons donc de telles primitives locales dans deux cas :
— Quand q est $\mathcal{C}^1$, lorsque $\partial_i q_j = \partial_j q_i$ (pour tout i et j), par intégration de q sur des segments (théorème 9.5). C'est le *théorème de Poincaré*.
— Quand q est seulement continu, lorsque $\int_\Omega q_j \partial_i \varphi = \int_\Omega q_i \partial_j \varphi$ pour toute fonction test φ (théorème 9.7), par régularisation. Cette condition est une version faible de la condition de Poincaré.

Ainsi, lorsque Ω est simplement connexe, il existe une primitive dès que la condition de Poincaré ou sa version faible sont réalisées (théorèmes 9.10 et 9.11). Ces conditions sont nécessaires et suffisantes.

Nous comparons ces conditions au théorème 9.14. Enfin, nous montrons que, quand elle existe, la primitive est unique à une constante additive près sur chaque composante connexe Ω_m de Ω et que, en fixant sa valeur en un point de chaque Ω_m, on obtient une application $q \mapsto f$ continue (théorème 9.18).

9.1. Primitive explicite d'un champ à circulation nulle

Construisons explicitement une **primitive** q^* d'un champ $q = (q_1, \ldots, q_d)$, c'est-à-dire que $\nabla q^* = q$, lorsque la circulation de q est nulle sur chaque lacet [1].

1. **Historique de la construction explicite d'une primitive du théorème 9.1.** Nous ignorons l'origine de ce résultat, qui est classique en théorie des formes différentielles à valeurs dans un espace de Banach, *cf.* par exemple [CARTAN, Henri, 19, théorème 3.4.3, p. 220], où q est «cachée» derrière la forme différentielle ω.

Théorème 9.1. — *Soit $q \in \mathcal{C}(\Omega; E^d)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et E est un espace de Neumann, tel que, pour tout lacet Γ de Ω de classe $\mathcal{C}^1$,*

$$\int_\Gamma q \cdot \mathrm{d}\ell = 0_E. \tag{9.1}$$

Dans chaque composante connexe Ω_m de Ω, choisissons un point a_m. Alors :

(a) *Pour chaque m et chaque $x \in \Omega_m$, l'élément de E défini par*

$$q^*(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Gamma(a_m,x)} q \cdot \mathrm{d}\ell$$

est indépendant du chemin $\Gamma(a_m, x)$ de classe $\mathcal{C}^1$ reliant a_m à x dans Ω_m (un tel chemin existe toujours).

(b) *On a $q^* \in \mathcal{C}^1(\Omega; E)$ et*

$$\nabla q^* = q.$$

(c) *Si le segment $[a_m, x]$ est inclus dans Ω,*

$$q^*(x) = (x - a_m) \cdot \int_0^1 q(a_m + t(x - a_m))\, \mathrm{d}t. \ \blacksquare$$

Optimalité du théorème 9.1 (b). La condition (9.1) est nécessaire et suffisante pour que q ait une primitive, car, si $q = \nabla q^*$, alors $\int_\Gamma q \cdot \mathrm{d}\ell = 0$ puisque la circulation d'un gradient sur un lacet est toujours nulle (théorème 8.11 (b)). $\square$

Notation incohérente ? Nous notons ici q^* la primitive, alors que partout ailleurs elle est notée f. C'est volontaire, car q^* est une primitive particulière, explicite, alors que f est une primitive quelconque. $\square$

Démonstration du théorème 9.1. (a) Chaque composante connexe Ω_m de Ω étant connexe et ouverte (théorème A.16), chacun de ses points x est relié (théorème 8.5) à son point a_m par un chemin $\Gamma(a_m, x)$ de Ω_m, et donc de Ω, de classe $\mathcal{C}^1$.

Vérifions que $\int_{\Gamma(a_m,x)} q \cdot \mathrm{d}\ell$ ne dépend pas du chemin Γ reliant a_m à x. Soit Γ et Γ_* deux tels chemins. Le recollement $\Gamma \overrightarrow{\cup} \overleftarrow{\Gamma_*}$ de Γ et de Γ_* parcouru à l'envers est un lacet $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Par définition 8.15 de sa circulation (et avec le théorème 8.8),

$$\int_{\Gamma \overrightarrow{\cup} \overleftarrow{\Gamma_*}} q \cdot \mathrm{d}\ell = \int_\Gamma q \cdot \mathrm{d}\ell + \int_{\overleftarrow{\Gamma_*}} q \cdot \mathrm{d}\ell = \int_\Gamma q \cdot \mathrm{d}\ell - \int_{\Gamma_*} q \cdot \mathrm{d}\ell.$$

En le reparamétrant avec le théorème 8.4, on obtient (théorème 8.16) un lacet $\mathcal{C}^1$ ayant la même circulation. Circulation nulle, par hypothèse. Donc, on a bien

$$\int_\Gamma q \cdot \mathrm{d}\ell = \int_{\Gamma_*} q \cdot \mathrm{d}\ell.$$

(b) Il s'agit de montrer que q^* est continûment dérivable et que $\partial_i q^* = q_i$. Soit $x \in \Omega$, $\eta > 0$ tel que la boule $\{y \in \mathbb{R}^d : |y - x| \leq \eta\}$ soit incluse dans Ω, et s un nombre réel non nul tel que $|s| \leq \eta$.

D'après le théorème 8.8 (circulation sur $\overleftarrow{\Gamma}$) et la définition 8.15 de la circulation sur un recollement,

$$q^*(x + s\mathbf{e}_i) - q^*(x) = \fint_{\Gamma(a,x+s\mathbf{e}_i)} q \cdot \mathrm{d}\ell - \fint_{\Gamma(a,x)} q \cdot \mathrm{d}\ell = \fint_{\Lambda} q \cdot \mathrm{d}\ell,$$

où $\Lambda = \overleftarrow{\Gamma(a,x)} \overrightarrow{\cup} \Gamma(a, x + s\mathbf{e}_i)$. Ce chemin Λ reliant x à $x+s\mathbf{e}_i$, et la circulation étant indépendante du chemin reliant ces points d'après (a), ceci est vrai si Λ est le chemin rectiligne $\Gamma_{\overrightarrow{x,x+s\mathbf{e}_i}}$. Le calcul de la circulation sur un tel chemin (théorème 8.10) donne

$$q^*(x + s\mathbf{e}_i) - q^*(x) = s\mathbf{e}_i \cdot \int_0^1 q(x + ts\mathbf{e}_i)\,\mathrm{d}t = s\int_0^1 q_i(x + ts\mathbf{e}_i)\,\mathrm{d}t.$$

Donc,

$$q^*(x + s\mathbf{e}_i) - q^*(x) - sq_i(x) = s\int_0^1 (q_i(x + ts\mathbf{e}_i) - q_i(x))\,\mathrm{d}t.$$

La majoration des semi-normes de l'intégrale du théorème 4.15 donne, pour toute semi-norme $\| \,\|_{E;\nu}$ de E,

$$\|q^*(x + s\mathbf{e}_i) - q^*(x) - sq_i(x)\|_{E;\nu} \leq |s| \sup_{0\leq t\leq s} \|q_i(x + t\mathbf{e}_i) - q_i(x)\|_{E;\nu}.$$

Pour tout $\epsilon > 0$, on peut choisir η tel que le second membre soit $\leq \epsilon\,|s|$ puisque q_i est continue, donc, d'après la caractérisation des dérivées partielles (2.7) de la définition 2.8,

$$\partial_i q^*(x) = q_i(x).$$

Ses dérivées partielles étant continues, q^* appartient bien à $\mathcal{C}^1(\Omega; E)$ (théorème 2.10).

(c) C'est l'expression de la circulation sur un segment du théorème 8.10 (b). □

Composantes connexes d'un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Observons que le nombre de points a_m à fixer dans le théorème 9.1 est dénombrable (éventuellement fini), car :

Tout ouvert U de $\mathbb{R}^d$ a une quantité dénombrable de composantes connexes. (9.2)

Démonstration. D'après le théorème A.16, les composantes connexes de U sont deux à deux disjointes et chacune d'elles est ouverte, et contient donc un point de $\mathbb{Q}^d$. Leur ensemble est donc dénombrable, comme toute image d'un ensemble dénombrable (théorème A.2 (b)), ici une partie de $\mathbb{Q}^d$ (partie qui est dénombrable, d'après le théorème A.2 (a), (d) et (c)). □

9.2. Primitive d'un champ orthogonal aux divergences nulles

Montrons qu'un champ $q = (q_1, \dots, q_d)$ a une primitive f s'il est «orthogonal» aux **champs tests** $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_d)$ à divergence nulle. C'est le **théorème d'orthogonalité** [2].

Théorème 9.2. — *Soit $q \in \mathcal{C}(\Omega; E^d)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et E est un espace de Neumann, tel que :*

$$\int_\Omega q \cdot \psi = 0_E, \quad \forall \psi \in \mathcal{K}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^d) \textit{ tel que } \nabla \cdot \psi = 0. \tag{9.3}$$

Alors, il existe $f \in \mathcal{C}^1(\Omega; E)$ telle que

$$\nabla f = q. \blacksquare$$

Optimalité du théorème 9.2. La condition (9.3) est nécessaire et suffisante pour que q ait une primitive, car, si $q = \nabla f$, alors $\nabla \cdot \psi = 0$ entraîne

$$\int_\Omega q \cdot \psi = \int_\Omega \sum_{i=1}^d \partial_i f \, \psi_i = -\int_\Omega f \sum_{i=1}^d \partial_i \psi_i = -\int_\Omega f \, \nabla \cdot \psi = 0_E. \ \square$$

Orthogonalité. En généralisant la notion d'orthogonalité par rapport à un produit scalaire, on peut dire qu'un champ q vérifiant (9.3) est *orthogonal* à l'espace

$$\mathcal{K}^\infty_{\mathrm{div}}(\Omega; \mathbb{R}^d) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\psi \in \mathcal{K}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^d) : \nabla \cdot \psi = 0\}$$

par rapport à l'application bilinéaire $(q, \psi) \mapsto \int_\Omega q \cdot \psi$ de $\mathcal{C}(\Omega; E^d) \times \mathcal{K}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^d)$ dans E.

La condition (9.3) étant nécessaire et suffisante pour que q soit un gradient, $\mathcal{K}^\infty_{\mathrm{div}}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ est *l'orthogonal* de l'espace $\mathcal{C}_\nabla(\Omega; E^d)$ des champs continus qui sont des gradients, ce qu'on peut noter

$$\mathcal{C}_\nabla(\Omega; E^d) = (\mathcal{K}^\infty_{\mathrm{div}}(\Omega; \mathbb{R}^d))^\perp. \ \square$$

---

2. **Historique de l'existence d'une primitive d'un champ orthogonal aux divergences nulles. Valeurs réelles.** Le théorème 9.2 est un cas particulier du *théorème d'orthogonalité pour les distributions*, *cf.* volume 3, qui résulte, pour $E = \mathbb{R}$, du *théorème de cohomologie* de Georges DE RHAM. Celui-ci démontra en 1955 [28, théorème 17', p. 114] qu'un *courant* T est homologue à 0 si et seulement si $T(\psi) = 0$ pour toute forme ψ qui est $\mathcal{C}^\infty$, fermée et à support compact (un courant généralise une forme différentielle sur une variété comme une distribution généralise une fonction ; pour une forme différentielle, ce résultat signifie que *toute forme différentielle fermée est exacte*).
Jacques-Louis LIONS observa en 1969 [56, p. 69] que le théorème d'orthogonalité pour les distributions réelles, et donc pour les fonctions continues, en résulte en considérant le courant $T = q_1 \mathrm{d}x_1 + \dots + q_n \mathrm{d}x_n$ (le passage des formes différentielles aux primitives est bien expliqué, pour les fonctions, dans [RUDIN, 66, § 10.42 et 10.43, p. 262–264]).
Vu l'importance du résultat pour la résolution des équations de Navier–Stokes, de nombreuses démonstrations plus directes et élémentaires furent données pour des distributions ou fonctions réelles particulières : par Olga LADYZHENSKAYA en 1963 [50, theorem 1, p. 28] pour $q \in (L^2(\Omega))^d$; par Luc TARTAR en 1978 [78] pour $q \in (H^{-1}(\Omega))^d$; par Jacques SIMON en 1993 [70] pour tout $q \in (\mathcal{D}'(\Omega))^d$.
Valeurs vectorielles. Jacques SIMON démontra le théorème 9.2 pour un espace E de Banach, en 1993 [71, théorème 5 (i), p. 4]. Nous reprenons ici la même méthode, basée sur notre théorème de concentration (théorème 8.18). (La démonstration de Georges DE RHAM [28] ne semble pas s'étendre à ce cas, car elle utilise des propriétés de réflexivité d'espaces de courants.)

Démonstration du théorème 9.2. Soit Γ un lacet $\mathcal{C}^1$ de Ω. Son image $[\Gamma]$ étant compacte, il existe, d'après le théorème d'inclusion forte (théorème A.22), $r > 0$ tel que tube $\mathcal{T} = [\Gamma] + B(0, r)$ soit inclus dans Ω. Soit n_Γ un nombre entier $\geq 1/r$.

Pour tout $n \geq n_\Gamma$, soit $\Psi_n \in \mathcal{C}^\infty_{\mathcal{T}_n}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$, où $\mathcal{T}_n = [\Gamma] + B(0, 1/n)$, l'écoulement tubulaire donné par le théorème 8.17, relatif à une fonction régularisante ρ_n donnée par la définition 7.7 (a). Il vérifie $\nabla \cdot \Psi_n = 0$ et sa restriction appartient à $\mathcal{K}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^d)$, d'après le théorème 2.16 (c), donc l'hypothèse (9.3) donne

$$\int_\Omega q \cdot \Psi_n = 0_E.$$

Le théorème de concentration (théorème 8.18) donne alors

$$\oint_\Gamma q \diamond \rho_n \cdot \mathrm{d}\ell = \int_\Omega q \cdot \Psi_n = 0_E. \tag{9.4}$$

Les régularisées convergeant localement (théorème 7.9 (a)),

$$q \diamond \rho_n \to q \ \text{ dans } \mathcal{C}(\Omega_{B(0,1/n_\Gamma)}; E).$$

Or, $[\Gamma] \subset \Omega_{B(0,r)} \subset \Omega_{B(0,1/n_\Gamma)}$ d'après le théorème 7.3. Donc,

$$\oint_\Gamma q \diamond \rho_n \cdot \mathrm{d}\ell \to \oint_\Gamma q \cdot \mathrm{d}\ell,$$

car la circulation dépend de q continûment (théorème 8.12 (b)), et donc séquentiellement continûment (théorème A.29). À la limite, (9.4) donne donc

$$\oint_\Gamma q \cdot \mathrm{d}\ell = 0_E.$$

Ce qui entraîne l'existence de f tel que $\nabla f = q$ d'après le théorème 9.1. □

9.3. Recollement de primitives locales dans un ouvert simplement connexe

Définissons les ensembles simplement connexes.

Définition 9.3. — *Un ensemble U d'un espace semi-normé séparé est dit* ***simplement connexe*** *si tout lacet de U est homotope dans U à un lacet réduit à un point.* ▮

Simple connexité *versus* **connexité.** Le vocable ⟪*simplement connexe*⟫ n'a malheureusement pas la même signification pour tous les auteurs. Pour certains, elle inclut la connexité, ce qui n'est pas le cas ici.

Pour inclure la connexité, il suffit de remplacer dans la définition 9.3 ⟪*tout lacet est homotope à* **un** *point*⟫ par ⟪*tout lacet est homotope à* **tout** *point de U*⟫. □

Simple connexité dans $\mathbb{R}^d$ *versus* présence de « trous ». Observons que :
— L'espace $\mathbb{R}^d$ est simplement connexe (on le vérifie en choisissant $T(t,s) = (1-s)\,\Gamma(t)$).
— Dans $\mathbb{R}$, tout ouvert est simplement connexe, même s'il a des trous.
— Dans $\mathbb{R}^2$ un ouvert est simplement connexe si et seulement s'il n'a pas de trous. Ainsi, la *couronne* $\{x \in \mathbb{R}^2 : 1 < |x| < 2\}$ est connexe mais n'est pas simplement connexe.
— Dans $\mathbb{R}^d$, $d \geq 3$, un ouvert simplement connexe peut avoir des trous. Ainsi, $\{x \in \mathbb{R}^3 : 1 < |x| < 2\}$ est connexe et simplement connexe. □

Simple connexité des ensembles étoilés. Dans un espace semi-normé séparé :

$$\textit{Tout ensemble étoilé est connexe et simplement connexe.} \tag{9.5}$$

Démonstration. Un ensemble U, étoilé par rapport à un point a, est simplement connexe parce que tout lacet Γ y est homotope au chemin réduit à $\{a\}$ *via* l'homotopie $H(t,s) = sa + (1-s)\Gamma(t)$.

Il est connexe, car, s'il était recouvert par deux ouverts disjoints non vides, alors a appartiendrait à l'un d'eux, $\mathcal{O}_1$, et l'autre, $\mathcal{O}_2$, contiendrait un point z de U, donc $\mathcal{U}_1 = \{s \in \mathbb{R} : a + s(z-a) \in \mathcal{O}_1\}$ et $\mathcal{U}_2 = \{s \in \mathbb{R} : a + s(z-a) \in \mathcal{O}_2\}$ seraient deux ouverts disjoints non vides recouvrant le segment $[0,1]$, ce qui contredirait sa connexité (théorème A.16). □

Montrons que, dans un ouvert simplement connexe, si un champ est localement un gradient, c'est un gradient. C'est-à-dire que, s'il a des primitives locales, il a une primitive globale, ce que nous appelons le **théorème de recollement de primitives locales** [3].

Théorème 9.4. — *Soit $q \in \mathcal{C}(\Omega; E^d)$, où E un espace de Neumann et*

$$\Omega \textit{ est un ouvert simplement connexe de } \mathbb{R}^d,$$

tel que, pour toute boule ouverte $B \Subset \Omega$, il existe $f_B \in \mathcal{C}^1(B; E)$ tel que

$$\nabla f_B = q \textit{ dans } B.$$

Alors, il existe $f \in \mathcal{C}^1(\Omega; E)$ telle que

$$\nabla f = q. \ \blacksquare$$

Démonstration. Soit Γ un lacet de Ω de classe $\mathcal{C}^1$. Par définition 9.3 d'un ouvert simplement connexe, Γ est homotope dans Ω à un lacet Γ_* réduit à un point. Comme,

3. **Historique du théorème de recollement de primitives locales.** Nous ignorons l'origine du théorème 9.4, qui est classique en théorie des formes différentielles à valeurs dans un espace de Banach, *cf.* par exemple [CARTAN, Henri, 19, théorème 3.8.1, p. 230], où q est « cachée » derrière la 1-*forme différentielle fermée* ω, *fermée* signifiant que c'est *localement un gradient* [19, définition, p. 222].

par hypothèse q est localement un gradient, sa circulation sur un lacet est invariante par homotopie d'après le théorème 8.20, donc

$$\oint_\Gamma q \cdot \mathrm{d}\ell = \oint_{\Gamma_*} q \cdot \mathrm{d}\ell.$$

La circulation sur un lacet réduit à un point étant nulle (théorème 8.10 (a)), il vient

$$\oint_\Gamma q \cdot \mathrm{d}\ell = 0_E.$$

Ceci pour tout Γ, ce qui assure (théorème 9.1) l'existence d'une primitive f. □

Optimalité du théorème 9.4. L'existence de primitives locales est évidemment nécessaire à l'existence d'une primitive globale, elle est donc nécessaire et suffisante.

Dans un ouvert quelconque, ce n'est plus toujours vrai. Un exemple de fonction ayant des primitives locales mais pas de primitive globale est donné au théorème 9.15 en dimension $d = 2$ et au théorème 9.16 en dimension quelconque. □

Attention. Les primitives locales f_B données au théorème 9.4 **ne se recollent pas nécessairement**, car elles peuvent différer d'une constante. Mais, quand Ω est simplement connexe on peut ajouter une constante à chacune de façon qu'elles se recollent. D'où le nom de *théorème de recollement* **de** *primitives*, pas **des** primitives. □

9.4. Primitive explicite dans un ouvert étoilé : théorème de Poincaré

Un ensemble U d'un espace vectoriel est dit **étoilé par rapport au point** a si, pour tout $u \in U$, il contient le segment $[a, u] = \{a + t(u - a) : 0 \leq t \leq 1\}$. Un ensemble est dit **étoilé** s'il est étoilé par rapport à un de ses points.

Construisons explicitement, dans un tel ouvert, une primitive d'un champ de vecteurs continûment dérivable $q = (q_1, \ldots, q_d)$ tel que $\partial_i q_j = \partial_j q_i$ pour tout i et j, ce qui est plus faible (*cf.* théorème 9.14 (e)) que les conditions (9.1) et (9.3) considérées précédemment pour un ouvert quelconque. C'est le **théorème de Poincaré** [4].

Théorème 9.5. — *Soit $q \in \mathcal{C}^1(\Omega; E^d)$, où E est un espace de Neumann et*

Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ étoilé par rapport à un point a,

tel que, pour tout i et j dans $[\![1, d]\!]$,

$$\partial_i q_j = \partial_j q_i.$$

4. **Historique du théorème de Poincaré.** Le théorème 9.5 a été établi par Henri POINCARÉ, en 1899 [63, p. 10], pour les valeurs réelles.

Alors, la fonction définie, pour tout $x \in \Omega$, par

$$q^*(x) \stackrel{\text{def}}{=} (x-a) \cdot \int_0^1 q(a+t(x-a))\,\mathrm{d}t$$

vérifie $q^* \in \mathcal{C}^2(\Omega; E)$ et

$$\nabla q^* = q. \quad \blacksquare$$

Démonstration. Notons, pour tout $x \in \Omega$ et $j \in [\![1, d]\!]$,

$$Q_j(x) = \int_0^1 q_j(a+t(x-a))\,\mathrm{d}t.$$

Admettons un instant que sa dérivation sous le signe somme soit loisible, et donc que $Q_j \in \mathcal{C}^1(\Omega; E)$ et

$$\partial_i Q_j(x) = \int_0^1 t\,\partial_i q_j(a+t(x-a))\,\mathrm{d}t. \tag{9.6}$$

Alors, $q^*(x) = \sum_j (x_j - a_j) Q_j(x)$, donc le théorème 3.6 et sa formule de Leibniz donnent $q^* \in \mathcal{C}^1(\Omega; E)$ et

$$\begin{aligned}\partial_i q^*(x) = Q_i(x) + \sum_{j=1}^d (x_j - a_j)\partial_i Q_j(x) = \\ = \int_0^1 q_i(a+t(x-a)) + t\sum_{j=1}^d (x-a)_j \partial_i q_j(a+t(x-a))\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Utilisons l'hypothèse $\partial_i q_j = \partial_j q_i$ et observons que, d'après la formule de changement de variable dans une dérivée du théorème 3.12 (a) relatif à $T(t) = a + t(x-a)$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(q_i(a+t(x-a))\big) = \sum_{j=1}^d \partial_j q_i(a+t(x-a))\,(x-a)_j,$$

puisque $\mathrm{d}T_j/\mathrm{d}t(t) = (x-a)_j$. On obtient ainsi

$$\partial_i q^*(x) = \int_0^1 q_i(a+t(x-a)) + t\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(q_i(a+t(x-a))\big)\,\mathrm{d}t.$$

Avec la formule de Leibniz, à nouveau, et l'expression de l'intégrale d'une dérivée du théorème 6.4 (a), on obtient finalement

$$\partial_i q^*(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(t\,q_i(a+t(x-a))\big)\,\mathrm{d}t = q_i(x),$$

c'est-à-dire $\nabla q^* = q$. D'où $\partial_j \partial_i q^* = \partial_j q_i \in \mathcal{C}(\Omega; E)$, et donc $q^* \in \mathcal{C}^2(\Omega; E)$.

Il reste à vérifier (9.6). Soit B une boule ouverte telle que $\overline{B} \subset \Omega$. Le théorème 4.27 de dérivation sous le signe somme dans $B \times]0,1[$, avec $f(x,t) = q_j(a + t(x-a))$ et $g_i(x,t) = t\, \partial_i q_j(a + t(x-a))$ donne alors (9.6), dans chaque B et donc dans tout Ω. En effet, ses hypothèses sont satisfaites car :
— Les fonctions f et g_i sont uniformément continues et bornées, car elles le sont dans le compact $\overline{B} \times [0,1]$ d'après le théorème de Heine (théorème A.34), puisqu'elles y sont continues.
— Pour tout t fixé, l'application $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable et $\partial_i f(x,t) = g_i(x,t)$. Ce qui est élémentaire et termine la démonstration de (9.6), et donc celle du théorème 9.5. $\square$

9.5. Primitive explicite sous la condition de Poincaré affaiblie

Avant d'en venir à la condition de Poincaré affaiblie, observons que tout ouvert Ω qui est étoilé par rapport à un point a est la réunion des parties $\Omega^{*a}_{1/n}$ des $\Omega_{1/n}$ qui sont étoilées par rapport à a.

Théorème 9.6. — *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ étoilé par rapport à un point a et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit*

$$\Omega^{*a}_{1/n} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \Omega : [a,x] \subset \Omega_{1/n}\},$$

où $[a,x] = \{a + t(x-a) : 0 \le t \le 1\}$ et $\Omega_{1/n} = \{x \in \Omega : B(x, 1/n) \subset \Omega\}$.

Alors, $\Omega^{*a}_{1/n}$ est un ouvert étoilé et

$$\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \Omega^{*a}_{1/n}. \blacksquare$$

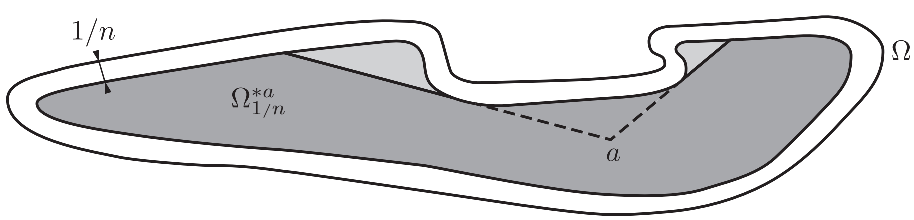

Figure 9.1. *Partie $\Omega^{*a}_{1/n}$ de $\Omega_{1/n}$ étoilée par rapport à a.*
$\Omega^{*a}_{1/n}$ est gris foncé et $\Omega_{1/n}$ est la réunion des zones gris clair et gris foncé

Démonstration du théorème 9.6. L'ensemble $\Omega^{*a}_{1/n}$ est étoilé car, si $x \in \Omega^{*a}_{1/n}$, pour tout $y \in [a,x]$ on a $[a,y] \subset [a,x] \subset \Omega_{1/n}$, d'où $y \in \Omega^{*a}_{1/n}$ et donc $[a,x] \subset \Omega^{*a}_{1/n}$.

Montrons qu'il est ouvert. Soit $x \in \Omega^{*a}_{1/n}$. Alors, $[a,x]$ est un compact inclus dans $\Omega_{1/n}$, qui est ouvert (théorème 7.2 (a)), donc le théorème d'inclusion forte (théorème A.22) fournit $r > 0$ tel que $[a,x] + B(0,r) \subset \Omega_{1/n}$. Si $y \in B(x,r)$,

$$[a,y] = \{a + t(x-a) + t(y-x) : 0 \leq t \leq 1\} \subset [a,x] + B(0,r) \subset \Omega_{1/n},$$

puisque $|t(y-x)| \leq tr \leq r$, donc $y \in \Omega^{*a}_{1/n}$. Ce qui prouve que $\Omega^{*a}_{1/n}$ est ouvert.

Enfin, Ω est la réunion des $\Omega^{*a}_{1/n}$ car, si $x \in \Omega$, alors $[a,x] \subset \Omega$ donc, à nouveau d'après le théorème d'inclusion forte, il existe $r > 0$ tel que $[a,x] + B(0,r) \subset \Omega$, et donc $[a,x] \subset \Omega_{1/n}$ dès que $n \geq 1/r$, c'est-à-dire $x \in \Omega^{*a}_{1/n}$. □

Lorsque q est seulement continu, la condition de Poincaré $\partial_i q_j = \partial_j q_i$ n'a plus de sens «classique», mais on peut en donner une formulation «faible» qui assure encore l'existence d'une primitive explicite dans un ouvert étoilé, ainsi :

Théorème 9.7. — *Soit $q \in \mathcal{C}(\Omega; E^d)$, où E est un espace de Neumann et*

Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ étoilé par rapport à un point a,

tel que, pour tout i et j dans $[\![1,d]\!]$ et tout $\varphi \in \mathcal{K}^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega q_j \,\partial_i\varphi = \int_\Omega q_i \,\partial_j\varphi. \tag{9.7}$$

Alors, la fonction définie par

$$q^*(x) \stackrel{\text{def}}{=} (x-a) \cdot \int_0^1 q(a + t(x-a))\,\mathrm{d}t$$

vérifie $q^* \in \mathcal{C}^1(\Omega; E)$ et

$$\nabla q^* = q. \ \blacksquare$$

Condition de Poincaré faible. L'égalité (9.7) est appelée «condition de Poincaré faible», car, lorsque $q \in \mathcal{C}^1(\Omega; E^d)$, elle est équivalente à la condition de Poincaré $\partial_i q_j = \partial_j q_i$, comme nous le verrons au théorème 9.9. □

Démonstration du théorème 9.7. Procédons en quatre étapes.

1º *Régularisation.* Soit $q \diamond \rho_n \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_{1/n}; E^d)$ une régularisée de q donnée par la définition 7.7, où ρ_n a son support dans la boule $B(0, 1/n)$ et où $\Omega_{1/n} = \Omega_{B(0,1/n)}$, c'est-à-dire $\{x \in \mathbb{R}^d : B(x, 1/n) \subset \Omega\}$. Montrons que, pour tout i et j,

$$\partial_i(q_j \diamond \rho_n) - \partial_j(q_i \diamond \rho_n) = 0_E \ \text{ dans } \Omega_{1/n}. \tag{9.8}$$

L'expression de la dérivée d'une pondérée du théorèmes 7.4 (b) et la seconde expression de la pondérée elle-même du 7.2 (c) donnent

$$\partial_i(q \diamond \rho_n)(x) = -(q \diamond \partial_i \rho_n)(x) = -\int_\Omega q(y)\, \partial_i \rho_n(y - x)\, \mathrm{d}y.$$

Donc,

$$\partial_i(q_j \diamond \rho_n)(x) - \partial_j(q_i \diamond \rho_n)(x) = \int_\Omega q_i(y)\, \partial_j \rho_n(y - x) - q_j(y)\, \partial_i \rho_n(y - x)\, \mathrm{d}y.$$

Le second membre est nul d'après la condition de Poincaré faible (9.7) relative à la fonction φ définie par $\varphi(y) = \rho_n(y - x)$, ce qui établit (9.8).

2º *Primitive dans des parties étoilées.* Soit $\Omega^{*a}_{1/n}$ la partie de $\Omega_{1/n}$ qui est étoilée par rapport à a. Elle est ouverte et étoilée (théorème 9.6). D'après le théorème de Poincaré (théorème 9.5), la propriété (9.8) entraîne que la fonction définie dans $\Omega^{*a}_{1/n}$ par

$$q^*_n(x) = (x - a) \cdot \int_0^1 (q \diamond \rho_n)(a + t(x - a))\, \mathrm{d}t \tag{9.9}$$

est une primitive de $q \diamond \rho_n$. C'est-à-dire, pour tout i,

$$\partial_i q^*_n = q_i \diamond \rho_n \ \text{ dans } \Omega^{*a}_{1/n}.$$

3º *Convergence.* Soit $k \in \mathbb{N}$ et $n \geq k$. Alors, $\Omega^{*a}_{1/k} \subset \Omega^{*a}_{1/n} \subset \Omega_{1/n}$ et la propriété de convergence locale des régularisées du théorème 7.10 (a) donne, quand $n \to \infty$,

$$q_i \diamond \rho_n \to q_i \text{ dans } \mathcal{C}(\Omega^{*a}_{1/k}; E).$$

Donc,

$$\partial_i q^*_n \to q_i \ \text{ dans } \mathcal{C}(\Omega^{*a}_{1/k}; E).$$

En outre, l'expression (9.9) de q^*_n entraîne, comme on va le vérifier au lemme 9.8 ci-dessous,

$$q^*_n \to q^* \ \text{ dans } \mathcal{C}(\Omega^{*a}_{1/k}; E). \tag{9.10}$$

La propriété de complétude de $\mathcal{C}^1(\Omega^{*a}_{1/k}; E)$ du théorème 2.23 montre alors que alors $q^* \in \mathcal{C}^1(\Omega^{*a}_{1/k}; E)$ et

$$\partial_i q^* = q_i \text{ dans } \Omega^{*a}_{1/k}.$$

4º *Recollement.* Les $(\Omega^{*a}_{1/k})_{k \geq 1}$ recouvrant Ω (théorème 9.6), il en résulte que q^* appartient à $\mathcal{C}^1(\Omega; E)$ et $\nabla q^* = q$ dans tout Ω. $\square$

Il reste à établir la convergence (9.10), c'est-à-dire la propriété suivante.

Lemme 9.8. — *Soit $q \in \mathcal{C}(\Omega; E^d)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ étoilé par rapport à un point a et E est un espace de Neumann, et, pour tout $x \in \Omega$, soit*

$$q^*(x) \overset{\text{def}}{=} (x-a) \cdot \int_0^1 q(a + t(x-a))\,\mathrm{d}t.$$

Alors, l'application $q \mapsto q^*$ est linéaire continue, et donc séquentiellement continue, de $\mathcal{C}(\Omega; E^d)$ dans $\mathcal{C}(\Omega; E)$. ▮

Démonstration. Notons $\{\|\ \|_{E;\nu} : \nu \in \mathcal{N}_E\}$ la famille de semi-normes de E.

Étant donné K un compact inclus dans Ω, soit

$$D = \{a + t(x-a) : x \in K,\ 0 \le t \le 1\}.$$

C'est un compact de $\mathbb{R}^d$ (puisqu'il est fermé et borné) qui est inclus dans Ω (puisque celui-ci est étoilé). Et soit $c = \sup_{x \in K} |x - a|$.

La définition 1.3 (a) des semi-normes de $\mathcal{C}(\Omega; E)$ donne alors, avec l'inégalité (2.2), p. 39 et la majoration des semi-normes de l'intégrale du théorème 4.17 (b), pour tout compact $K \subset \Omega$ et tout $\nu \in \mathcal{N}_E$,

$$\|q^*\|_{\mathcal{C}(\Omega;E);K,\nu} = \sup_{x \in K} \|q^*(x)\|_{E;\nu} \le c \sup_{x \in D} \|q(x)\|_{E^d;\nu} = c\,\|q\|_{\mathcal{C}(\Omega;E^d);D,\nu}.$$

D'après la caractérisation des applications linéaires continues du théorème 1.25, ceci montre que l'application $q \mapsto q^*$ est continue. Elle est donc séquentiellement continue, comme toute application continue (théorème A.29). ☐

Continuité à valeurs dans $\mathcal{C}^1(\Omega; E)$. Sous les hypothèses du lemme 9.8,

l'application $q \mapsto q^*$ est continue de $\mathcal{C}(\Omega; E^d)$ dans $\mathcal{C}^1(\Omega; E)$.

En effet, $\partial_i q^* = q_i$ d'après le théorème 9.7, donc les applications $q \mapsto \partial_i q^*$ sont, elles aussi, continues de $\mathcal{C}(\Omega; E^d)$ dans $\mathcal{C}(\Omega; E)$.

Cette propriété, qui n'est établie ici que pour un ouvert Ω étoilé, sera généralisée aux ouverts quelconques au théorème 9.18. ☐

Vérifions que l'hypothèse (9.7) du théorème 9.7 est une version faible de la condition de Poincaré $\partial_i q_j = \partial_j q_i$.

Théorème 9.9. — *Soit $q \in \mathcal{C}^1(\Omega; E^d)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et E est un espace de Neumann. Alors,*

$$\partial_i q_j = \partial_j q_i,$$

où i et j appartiennent à $[\![1, d]\!]$, si et seulement si, pour tout $\varphi \in \mathcal{K}^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega q_j \, \partial_i \varphi = \int_\Omega q_i \, \partial_j \varphi. \blacksquare$$

Démonstration. *Partie directe.* Si

$$\partial_i q_j = \partial_j q_i$$

, en utilisant deux fois la formule d'intégration par parties du théorème 6.12, on obtient

$$\int_\Omega q_i \, \partial_j \varphi = -\int_\Omega \partial_j q_i \, \varphi = -\int_\Omega \partial_i q_j \, \varphi = \int_\Omega q_j \, \partial_i \varphi.$$

Réciproque. Soit $\varphi \in \mathcal{K}^\infty(\Omega)$. La formule d'intégration par parties du théorème 6.12, à nouveau, donne $\int_\Omega q_i \, \partial_j \varphi = -\int_\Omega \partial_j q_i \, \varphi$ et $\int_\Omega q_j \, \partial_i \varphi = -\int_\Omega \partial_i q_j \, \varphi$. D'où, par soustraction,

$$\int_\Omega q_i \, \partial_j \varphi - q_j \, \partial_i \varphi = \int_\Omega (\partial_i q_j - \partial_j q_i) \, \varphi.$$

Si ceci s'annule pour tout φ, alors $\partial_i q_j = \partial_j q_i$ d'après le lemme de Du Bois-Reymond (théorème 6.13). $\square$

9.6. Primitives dans un ouvert simplement connexe

Montrons que, dans un ouvert simplement connexe, la condition $\partial_i q_j = \partial_j q_i$ de Poincaré assure, pour un champ continûment dérivable, l'existence d'une primitive.

Théorème 9.10. — *Soit $q \in \mathcal{C}^1(\Omega; E^d)$, où E est un espace de Neumann et*

Ω est un ouvert simplement connexe de $\mathbb{R}^d$,

tel que, pour tout i et j dans $[\![1, d]\!]$,

$$\partial_i q_j = \partial_j q_i.$$

Alors, il existe $f \in \mathcal{C}^2(\Omega; E)$ telle que

$$\nabla f = q. \blacksquare$$

Démonstration. L'hypothèse $\partial_i q_j = \partial_j q_i$ entraîne, d'après le théorème de Poincaré (théorème 9.5), l'existence d'une primitive dans toute boule $B \subset \Omega$. Ce qui entraîne l'existence d'une primitive dans tout Ω d'après le théorème de recollement de primitives locales (théorème 9.4), puisque Ω est simplement connexe. $\square$

Optimalité du théorème 9.10. La condition $\partial_i q_j = \partial_j q_i$ est nécessaire et suffisante pour qu'un champ continûment dérivable q ait une primitive, car, si $q = \nabla f$, alors

$$\partial_i q_j = \partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f = \partial_j q_i.$$

Quand Ω est simplement connexe, elle est donc nécessaire et suffisante.

Pour un ouvert Ω quelconque, elle est nécessaire, mais pas toujours suffisante (théorème 9.16). $\square$

Montrons, toujours dans un ouvert simplement connexe, que, lorsque q est seulement continu, la condition de Poincaré faible assure, elle aussi, l'existence d'une primitive.

Théorème 9.11. — *Soit $q \in \mathcal{C}(\Omega; E^d)$, où E est un espace de Neumann et*

$$\Omega \text{ est un ouvert simplement connexe de } \mathbb{R}^d,$$

tel que, pour tout i et j dans $[\![1, d]\!]$ et tout $\varphi \in \mathcal{K}^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega q_j \, \partial_i \varphi = \int_\Omega q_i \, \partial_j \varphi. \tag{9.11}$$

Alors, il existe $f \in \mathcal{C}^1(\Omega; E)$ telle que

$$\nabla f = q. \blacksquare$$

Démonstration. L'hypothèse (9.11) entraîne, d'après le théorème 9.7, l'existence d'une primitive dans toute boule $B \subset \Omega$. Ce qui entraîne l'existence d'une primitive dans tout Ω d'après le théorème de recollement de primitives locales (théorème 9.4), puisque Ω est simplement connexe. $\square$

Optimalité du théorème 9.11. Quand Ω est simplement connexe, la condition (9.11) est nécessaire et suffisante pour que q ait une primitive, car, si $q = \nabla f$, alors, pour tout $\varphi \in \mathcal{K}^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega q_j \, \partial_i \varphi = \int_\Omega \partial_j f \, \partial_i \varphi = -\int_\Omega f \, \partial_j \partial_i \varphi = -\int_\Omega f \, \partial_i \partial_j \varphi = \int_\Omega \partial_i f \, \partial_j \varphi = \int_\Omega q_i \, \partial_j \varphi.$$

Pour un ouvert Ω quelconque, elle est nécessaire mais pas toujours suffisante (théorème 9.14 (e)). $\square$

Montrons que, dans un ouvert simplement connexe de $\mathbb{R}^2$, tout champ $v = (v_1, v_2)$ à divergence nulle dérive d'une fonction de courant, ce qui est le **lemme de Haar** [5].

5. **Historique du lemme de Haar.** Alfréd HAAR démontra le théorème 9.12 avec $E = \mathbb{R}$ entre 1926 [43] et 1929 [44].

Théorème 9.12. — *Soit $v \in \mathcal{C}^1(\Omega; E^2)$, où Ω est un ouvert simplement connexe de $\mathbb{R}^2$ et E est un espace de Neumann, tel que*

$$\partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 = 0_E.$$

Alors, il existe une fonction de **courant** $f \in \mathcal{C}^2(\Omega; E)$ *telle que :*

$$v_1 = \partial_2 f, \quad v_2 = -\partial_1 f. \blacksquare$$

Démonstration. Le champ $q = (-v_2, v_1)$ vérifie

$$\partial_1 q_2 - \partial_2 q_1 = \partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 = 0_E,$$

donc, d'après le théorème 9.10, il possède une primitive f telle que

$$\partial_1 f = q_1 = -v_2, \quad \partial_2 f = q_2 = v_1. \square$$

Formulation abrégée du théorème 9.12. En notant $^\perp$ la rotation de $\pi/2$ dans le sens indirect, et donc

$$\nabla^\perp \stackrel{\text{def}}{=} (\partial_2, -\partial_1),$$

le résultat du théorème 9.12 s'exprime ainsi :

$$\textit{Si } \Omega \textit{ est simplement connexe et } \nabla \cdot v = 0_E, \textit{ il existe } f \textit{ telle que } \nabla^\perp f = v. \tag{9.12}$$

$\square$

Unicité. La fonction de courant f obtenue au théorème 9.12 est unique à une constante additive près sur chaque composante connexe de Ω, d'après théorème 9.17 (b) (puisque ∇f est unique). $\square$

Condition d'existence faible. D'après le théorème 9.11, il existe une fonction de courant $f \in \mathcal{C}^1(\Omega; E)$ dès que la divergence du champ $v = (v_1, v_2)$ est nulle au sens faible suivant : pour tout $\varphi \in \mathcal{K}^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega v_1 \partial_1 \varphi + v_2 \partial_2 \varphi = 0_E. \square$$

Courants en dimension quelconque. En dimension supérieure à deux, la construction d'une fonction de courant associée à une fonction à divergence nulle est beaucoup plus complexe, *cf.* par exemple [GIRAULT–RAVIART, 40, chap. I, § 3.3]. $\square$

9.7. Comparaison des conditions d'existence d'une primitive

Introduisons le sous-espace des champs ayant une primitive.

Définition 9.13. — *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et E un espace de Neumann. On note*

$$\mathcal{C}_\nabla(\Omega; E^d) \stackrel{\text{def}}{=} \{q \in \mathcal{C}(\Omega; E^d) : \exists f \in \mathcal{C}^1(\Omega; E) \textit{ tel que } \nabla f = q\},$$

espace vectoriel que l'on munit des semi-normes de $\mathcal{C}(\Omega; E^d)$. $\blacksquare$

Comparons les conditions utilisées aux sections précédentes pour obtenir l'existence d'une primitive.

Théorème 9.14. — *Soit $q \in \mathcal{C}(\Omega; E^d)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et E est un espace de Neumann. Alors :*

(a) $$\begin{aligned} q \in \mathcal{C}_\nabla(\Omega; E^d) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists f \in \mathcal{C}^1(\Omega; E) \textit{ tel que } \nabla f = q \\ &\Leftrightarrow \quad \int_\Omega q \cdot \psi = 0_E, \ \ \forall \psi \in \mathcal{K}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^d) \textit{ tel que } \nabla \cdot \psi = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \oint_\Gamma q \cdot \mathrm{d}\ell = 0_E, \ \ \forall \Gamma \textit{ lacet } \mathcal{C}^1 \textit{ de } \Omega. \end{aligned}$$

(b) *Si Ω est simplement connexe*

$$\begin{aligned} q \in \mathcal{C}_\nabla(\Omega; E^d) \quad &\Leftrightarrow \quad \exists f \in \mathcal{C}^1(\Omega; E) \textit{ tel que } \nabla f = q \\ &\Leftrightarrow \quad \int_\Omega q \cdot \psi = 0_E, \ \ \forall \psi \in \mathcal{K}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^d) \textit{ tel que } \nabla \cdot \psi = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \oint_\Gamma q \cdot \mathrm{d}\ell = 0_E, \ \ \forall \Gamma \textit{ lacet } \mathcal{C}^1 \textit{ de } \Omega \\ &\Leftrightarrow \quad \oint_\Gamma q \cdot \mathrm{d}\ell = \oint_{\Gamma_*} q \cdot \mathrm{d}\ell, \ \ \forall \Gamma \textit{ et } \Gamma_* \textit{ lacets } \mathcal{C}^1 \textit{ homotopes} \\ &\Leftrightarrow \quad \int_\Omega q_j \partial_i \varphi = \int_\Omega q_i \partial_j \varphi, \ \ \forall i, \ \forall j, \ \forall \varphi \in \mathcal{K}^\infty(\Omega) \\ &\Leftrightarrow \quad \forall \textit{ boule } B \Subset \Omega, \ \exists f_B \in \mathcal{C}^1(B; E) \textit{ t.q. } \nabla f_B = q \textit{ dans } B. \end{aligned}$$

(c) $\forall$ *boule* $B \Subset \Omega$, $\exists f_B \in \mathcal{C}^1(B; E)$ *tel que* $\nabla f_B = q$ *dans* B

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad \int_\Omega q_j \partial_i \varphi = \int_\Omega q_i \partial_j \varphi, \ \ \forall i, \ \forall j, \ \forall \varphi \in \mathcal{K}^\infty(\Omega) \\ &\Leftrightarrow \quad \oint_\Gamma q \cdot \mathrm{d}\ell = \oint_{\Gamma_*} q \cdot \mathrm{d}\ell, \ \ \forall \Gamma \textit{ et } \Gamma_* \textit{ lacets } \mathcal{C}^1 \textit{ homotopes.} \end{aligned}$$

(d) *Si $q \in \mathcal{C}^1(\Omega; E^d)$,*

$$\partial_i q_j = \partial_j q_i \quad \Leftrightarrow \quad \int_\Omega q_j \partial_i \varphi = \int_\Omega q_i \partial_j \varphi, \ \ \forall \varphi \in \mathcal{K}^\infty(\Omega).$$

(e) *Si $q \in \mathcal{C}_\nabla(\Omega; E^d)$, les propriétés de (c) sont vérifiées, mais il existe des ouverts Ω pour lesquels la réciproque est fausse.* ▮

Le cas d'un champ à support compact. Si q est à support compact dans Ω, les équivalences de (b) sont vraies même si Ω n'est pas simplement connexe.

En effet, si q a des primitives locales dans Ω, son prolongement par 0_E a des primitives locales dans tout $\mathbb{R}^d$, qui est simplement connexe, donc il a une primitive dans tout $\mathbb{R}^d$, dont la restriction est une primitive de q dans Ω. Et donc, les propriétés de (c) sont équivalentes à celles de (a). □

Démonstration du théorème 9.14. (a) *Première équivalence.* Pour tout $f \in \mathcal{C}^1(\Omega; E)$ et $\psi \in \mathcal{K}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^d)$, la formule d'intégration par parties du théorème 6.12 donne

$$\int_\Omega \nabla f \cdot \psi = \sum_{i=1}^d \int_\Omega \partial_i f\, \psi_i = -\sum_{i=1}^d \int_\Omega f\, \partial_i \psi_i = -\int_\Omega f\, \nabla \cdot \psi.$$

Si $\nabla f = q$, on a donc $\int_\Omega q \cdot \psi = -\int_\Omega f\, \nabla \cdot \psi = 0_E$ dès que $\nabla \cdot \psi = 0$. La réciproque est donnée par le théorème d'orthogonalité (théorème 9.2).

Seconde équivalence. Si $q = \nabla f$, sa circulation sur les lacets est nulle (théorème 8.11 (b)). La réciproque est donnée par le théorème 9.1.

(c) *Première équivalence.* Si $\int_\Omega q_j \partial_i \varphi = \int_\Omega q_i \partial_j \varphi$ pour tout i, j et φ, et si B est une boule incluse dans Ω, le théorème de Poincaré 9.11 montre, en se restreignant aux φ à support dans B, que q y a une primitive f_B.

Venons-en à la réciproque (elle est aisée lorsque Ω est simplement connexe, *cf.* le commentaire *Optimalité du théorème 9.11*, p. 216, mais ici Ω est un ouvert quelconque).

Soit $\varphi \in \mathcal{K}^\infty(\Omega)$ et K son support. Chaque point x de K est inclus dans une boule ouverte B_x incluse dans Ω, donc, K étant compact, on peut en extraire un sous-recouvrement fini $(B_m)_{m \in M}$, où B_m désigne B_{x_m}. Soit $(\alpha_m)_{m \in M}$ une partition de l'unité associée au recouvrement par les B_m de leur réunion ω, donnée par le théorème 7.18. Le support de $q_j \partial_i \varphi$ est inclus dans celui de φ et *a fortiori* dans l'ouvert ω, donc son intégrale peut être restreinte à ω d'après le théorème 4.17 (a), c'est-à-dire

$$\int_\Omega q_j \partial_i \varphi = \int_\omega q_j \partial_i \varphi.$$

Puisque $\sum_{m \in M} \alpha_m = 1$ dans ω, il vient

$$\int_\Omega q_j \partial_i \varphi = \int_\omega q_j \partial_i \Big(\sum_{m \in M} \alpha_m \varphi \Big) = \sum_{m \in M} \int_\omega q_j \partial_i (\alpha_m \varphi). \tag{9.13}$$

Supposons maintenant que q ait une primitive dans chaque boule, et soit f_m une primitive dans B_m. Le support de $\alpha_m \varphi$ étant inclus dans B_m, il vient, avec, à nouveau, la formule d'intégration par parties du théorème 6.12,

$$\int_\omega q_j \partial_i (\alpha_m \varphi) = \int_{B_m} \partial_j f_m \partial_i (\alpha_m \varphi) = -\int_{B_m} f_m \partial_j \partial_i (\alpha_m \varphi).$$

Les dérivées commutant d'après le théorème de Schwarz (théorème 2.12), on peut échanger i et j dans cette formule, et donc dans (9.13), ce qui donne

$$\int_\Omega q_j \partial_i \varphi = \int_\Omega q_i \partial_j \varphi.$$

Seconde équivalence. Si $q = \nabla f_B$ dans chaque boule B incluse dans Ω, le théorème d'invariance par homotopie 8.20 donne $\int_\Gamma q \cdot \mathrm{d}\ell = \int_{\Gamma_*} q \cdot \mathrm{d}\ell$ pour tous les lacets Γ et Γ_* homotopes dans Ω.

Réciproquement, supposons cette propriété vérifiée et soit B une boule incluse dans Ω. Tout lacet Γ de B est homotope dans celui-ci à un lacet Γ_* réduit à un point. La circulation étant alors nulle sur Γ_* (théorème 8.10 (a)), elle l'est aussi sur Γ, et donc le théorème 9.1 fournit f_B tel que $q = \nabla f_B$ dans B.

(b) Si Ω est simplement connexe, $\nabla f = q$ équivaut à $\nabla f_B = q$ dans chaque B d'après le théorème de recollement de primitives locales (théorème 9.4), et donc les propriétés de (a) sont équivalentes à celles de (c).

(d) C'est le théorème 9.9.

(e) Si $\nabla f = q$ dans Ω, c'est *a fortiori* vrai dans B. La réciproque est fausse, comme le montrent les exemples que l'on va construire aux théorèmes 9.15, pour $d = 2$, et 9.16, pour $d \geq 2$ quelconque. □

9.8. Champs ayant des primitives locales mais pas de primitive globale

Montrons qu'il existe des ouverts dans lesquels l'existence de primitives locales n'assure pas l'existence d'une primitive globale. Commençons par un exemple en dimension $d = 2$, à valeurs réelles.

Théorème 9.15. — *Soit $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| > 1\}$ et $q \in \mathcal{C}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^2)$ le champ défini, pour tout $x \in \Omega$, par*

$$q(x) = \frac{1}{|x|^2}(-x_2, x_1).$$

Pour toute boule B incluse dans Ω, il existe $f_B \in \mathcal{C}^\infty(B)$ telle que $\nabla f_B = q$ dans B, et pourtant il n'existe aucune fonction $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ telle que $\nabla f = q$ dans tout Ω. ▌

Démonstration. En coordonnées polaires, $\nabla = \mathbf{e}_r \partial_r + (\mathbf{e}_\theta / r)\partial_\theta$ et $q(\theta, r) = \mathbf{e}_\theta / r$, donc

$$\nabla\theta = q \text{ excepté en } \theta = 0.$$

En effet, θ est discontinu sur la demi-droite $D = \{(r, \theta) : \theta = 0\}$: il vaut 0 d'un côté, 2π de l'autre.

Le champ q n'a pas de primitive, sinon celle-ci serait continue (théorème 2.10) et sa restriction à $\Omega \setminus D$ serait (théorème 2.7) de la forme $\theta + c$, ce qui est contradictoire.

Pourtant $\nabla\theta = q$ dans toute boule B, car q est également un gradient dans les boules rencontrant D, ce qu'on montre en choisissant une autre demi-droite comme origine des θ. □

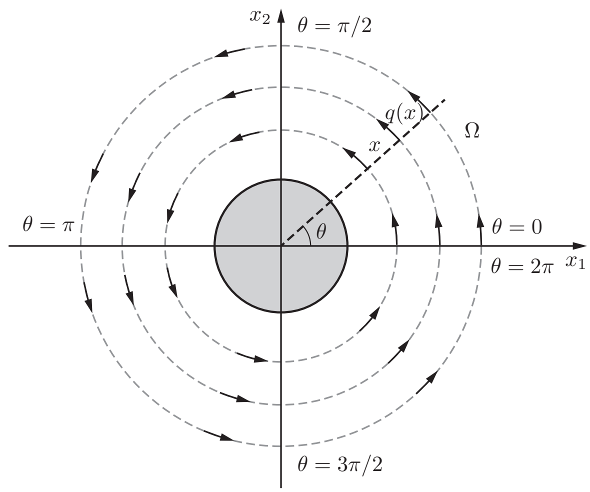

Figure 9.2. *Field q with local primitive θ but no global primitive. The set Ω is the exterior of the dashed disk*

Montrons qu'il existe de tels ouverts en toute dimension $d \geq 2$.

Théorème 9.16. — *Soit $d \geq 2$ et E un espace de Neumann non réduit à $\{0_E\}$.*

Alors, il existe un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ et un champ $q \in \mathcal{C}^\infty(\Omega; E^d)$ tels que : pour toute boule B incluse dans Ω, il existe une fonction $f_B \in \mathcal{C}^\infty(B; E)$ telle que $\nabla f_B = q$ dans B, et pourtant il n'existe aucune fonction $f \in \mathcal{C}^1(\Omega; E)$ telle que $\nabla f = q$ dans tout Ω. ▌

Démonstration. Soit Ω_2 l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbf{q}$ le champ donnés au théorème 9.15, et soit $u \in E$, $u \neq 0_E$. En dimension $d = 2$, le champ défini dans Ω_2 par $q(x) = \mathbf{q}(x)\,u$ convient. En dimension supérieure à deux, le champ défini dans $\Omega_2 \times \mathbb{R}^{d-2}$ par $q(x_1, \ldots, x_d) = (\mathbf{q}_1(x_1, x_2), \mathbf{q}_2(x_1, x_2), 0, \ldots, 0)\,u$ convient. □

La simple connexité est-elle nécessaire pour le recollement de primitives locales ? Rappelons que la simple connexité est suffisante pour que tout champ ayant des primitives locales ait une primitive globale d'après le théorème de recollement de primitives locales (théorème 9.4), et donc pour qu'un champ vérifiant la condition de Poincaré, faible ou forte, ait une primitive.

Réciproquement, elle est nécessaire si $d = 1$ ou 2, mais elle ne l'est plus si $d \geq 3$, bien qu'elle le soit pour $d = 3$ quand on impose une certaine régularité à l'ouvert. Ces résultats, qui m'ont été communiqués par Pierre DREYFUSS et Nicolas DEPAUW, font appel à des considérations difficiles de topologie algébrique qui sont présentées dans [DREYFUSS, 29]. Donnons-en un aperçu.

Le cas $d = 1$. Tout ouvert de $\mathbb{R}$ est simplement connexe, et a donc la propriété de recollement de primitives locales.

Le cas $d = 2$. Tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ non simplement connexe présente au moins un *trou*, c'est-à-dire qu'il existe un point $z \notin \Omega$ qui est entouré par un lacet Γ de Ω. Il n'a donc pas la propriété de recollement de primitives locales, car le champ q introduit au théorème 9.15, une fois translaté pour que z en soit l'origine, est localement un gradient dans Ω, mais ne l'est pas globalement.

Le cas $d = 3$. L'extérieur de la *sphère cornue d'Alexander* (celle-ci est représentée et étudiée p. 171 de [HATCHER, 45]) possède la propriété de recollement de primitives locales, pourtant il n'est pas simplement connexe.

En revanche, pour un ouvert de $\mathbb{R}^3$ borné et localement d'un côté du graphe d'une fonction continue, la propriété de recollement de primitives locales entraîne la simple connexité.

Le cas $d \geq 4$. La propriété de recollement de primitives locales d'un ouvert de $\mathbb{R}^d$ n'entraîne pas sa simple connexité, même pour un ouvert borné et localement d'un côté du graphe d'une fonction continue. □

9.9. Unicité d'une primitive

Montrons l'unicité d'une primitive à une constante additive près sur chaque composante connexe du domaine.

Théorème 9.17. — *Soit $q \in \mathcal{C}_\nabla(\Omega; E^d)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et E est un espace de Neumann. Alors :*

(a) *Le champ q a une infinité de primitives.*

(b) *Toutes les primitives se déduisent d'une primitive donnée en lui ajoutant une constante arbitraire dans chaque composante connexe Ω_m de Ω.*

(c) *Étant donnés, pour chaque composante connexe Ω_m de Ω, un point $a_m \in \Omega_m$ et $c_m \in E$, il existe une et une seule primitive f telle que : pour tout m,*

$$f(a_m) = c_m. \ \blacksquare$$

Rappel. Nous notons (définition 9.13) $\mathcal{C}_\nabla(\Omega; E^d)$ l'espace des champs continus ayant une primitive. □

Démonstration. (a) Chaque fonction $f + c$ où $c \in E$ est une primitive de q.

(b) Si f et f' sont deux primitives, $\nabla(f' - f) = 0$, donc (théorème 2.7) $f' - f$ est constante dans chaque Ω_m. Réciproquement, $f + c$ est une primitive si c est constante dans chaque Ω_m.

(c) Si g est une primitive, la fonction définie dans chaque Ω_m par $f = g - g(a_m) + c_m$ est une primitive telle que $f(a_m) = c_m$ pour chaque m.

C'est la seule, car si f' est une autre primitive le vérifiant, alors $f - f'$ est nulle au point a_m et est constante dans Ω_m d'après (b), et donc est nulle dans tout Ω_m. □

Le cas d'un ouvert connexe. Si Ω est connexe, sa seule composante connexe est Ω lui-même, ce qui simplifie l'énoncé des parties (b) et (c) du théorème 9.17. □

9.10. Application primitive continue

Construisons une application primitive linéaire continue.

Théorème 9.18. — *Soit $q \in \mathcal{C}_\nabla(\Omega; E^d)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et E est un espace de Neumann. Pour chaque composante connexe Ω_m de Ω, soit $a_m \in \Omega_m$. Soit enfin $f \in \mathcal{C}^1(\Omega; E)$ l'unique fonction telle que*

$$\nabla f = q, \quad f(a_m) = 0_E, \ \forall m.$$

Alors, l'application $q \mapsto f$ est linéaire continue, et donc séquentiellement continue, de $\mathcal{C}_\nabla(\Omega; E^d)$ dans $\mathcal{C}^1(\Omega; E)$.

Cette application coïncide avec l'application $q \mapsto q^*$ donnée par le théorème 9.1. ∎

Rappel. L'espace $\mathcal{C}_\nabla(\Omega; E^d)$ des champs continus ayant une primitive est muni (définition 9.13) des semi-normes de $\mathcal{C}(\Omega; E^d)$. □

Notation. On pourrait noter ∇^{-1} cette application, c'est-à-dire $\nabla^{-1} q \overset{\text{def}}{=} f$, ou encore $\nabla^{-1} \overset{\text{def}}{=} q^*$. □

Avant la démonstration, donnons une conséquence de la continuité séquentielle.

Théorème 9.19. — *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et f une suite et une fonction de $\mathcal{C}^1(\Omega; E)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et E est un espace de Neumann. Pour chaque composante connexe Ω_m de Ω, soit $a_m \in \Omega_m$. Supposons que, quand $n \to \infty$,*

$$\nabla f_n \to \nabla f \text{ dans } \mathcal{C}(\Omega; E^d)$$

et, pour tout m,

$$f_n(a_m) \to f(a_m) \text{ dans } E.$$

Alors,

$$f_n \to f \text{ dans } \mathcal{C}^1(\Omega; E). \ ∎$$

Démonstration du théorème 9.19. Soit g_n et g les fonctions de $\mathcal{C}^1(\Omega; E)$ définies dans chaque Ω_m par $g_n = f_n - f_n(a_m)$ et $g = f - f(a_m)$. Le théorème 9.18 montre que $g_n \to g$ dans $\mathcal{C}^1(\Omega; E)$, ce qui entraîne $f_n \to f$ dans $\mathcal{C}^1(\Omega; E)$. □

Démonstration du théorème 9.18. Soit $y \in \Omega$, Ω_m la composante connexe de Ω contenant y, Γ un chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux reliant a_m à y dans Ω_m (il en existe d'après le théorème 8.5) et $\epsilon > 0$ tel que la boule $B(y,\epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^d : |x-y| \leq \epsilon\}$ soit incluse dans Ω.

Soit $x \in \mathring{B}(y,\epsilon)$ et Λ le chemin rectiligne reliant y à x, c'est-à-dire le chemin défini dans $[0,1]$ par $\Lambda(t) = y + t(x-y)$. Le chemin $\Gamma \overrightarrow{\cup} \Lambda$ relie a_m à x dans Ω_m, donc l'expression de la circulation d'un gradient (théorème 8.11 (a)) et celle de leur recollement (définition 8.15) donnent

$$f(x) = f(a_m) + \int_{\Gamma \overrightarrow{\cup} \Lambda} \nabla f \cdot \mathrm{d}\ell = \int_\Gamma q \cdot \mathrm{d}\ell + \int_\Lambda q \cdot \mathrm{d}\ell.$$

Soit $\{\| \ \|_{E;\nu} : \nu \in \mathcal{N}_E\}$ la famille de semi-normes de E. La majoration des semi-normes de la circulation du théorème 8.12 (a) donne, pour tout $\nu \in \mathcal{N}_E$,

$$\|f(x)\|_{E;\nu} \leq (\gamma_\Gamma + \gamma_\Lambda) \sup_{z \in [\Gamma] \cup B(y,\epsilon)} \|q(z)\|_{E^d;\nu},$$

où $[\Gamma]$ est l'image de Γ, $\gamma_\Gamma = \sup_{t_o \leq t \leq t_e} |\Gamma'(t)|$ et $\gamma_\Lambda = \sup_{0 \leq t \leq 1} |\Lambda'(t)|$, et donc $\gamma_\Lambda = |x-y| \leq \epsilon$.

Soit maintenant un compact $K \subset \Omega$. Les ouverts $\mathring{B}(y,\epsilon)$ le recouvrent, donc il existe (définition A.17 (a)) un sous-recouvrement fini $\mathcal{R}$. Alors,

$$\sup_{x \in K} \|f(x)\|_{E;\nu} \leq c \sup_{z \in D} \|q(z)\|_{E^d;\nu},$$

où $c = \sup_\mathcal{R} \gamma_\Gamma + \epsilon$ est fini et $D = \bigcup_\mathcal{R} [\Gamma] \cup B(y,\epsilon)$. Or D est compact, car c'est une réunion finie d'ensembles fermés bornés (donc il est fermé et borné (théorème A.10) dans $\mathbb{R}^d$, et donc compact d'après le théorème de Borel–Lebesgue (théorème A.23 (b))). Et il est inclus dans Ω. Donc, par définition 1.3 (a) des semi-normes de $\mathcal{C}(\Omega;E)$, l'inégalité ci-dessus s'écrit

$$\|f\|_{\mathcal{C}(\Omega;E);K,\nu} \leq c\,\|q\|_{\mathcal{C}(\Omega;E^d);D,\nu}.$$

Par définition 2.14 (a) des semi-normes de $\mathcal{C}^1(\Omega;E)$, puisque $K \subset D$ et $\partial_i f = q_i$,

$$\|f\|_{\mathcal{C}^1(\Omega;E);K,\nu} = \sup\{\|f\|_{\mathcal{C}(\Omega;E);K,\nu}\,,\ \sup_{1 \leq i \leq d} \|\partial_i f\|_{\mathcal{C}(\Omega;E);K,\nu}\} \leq$$
$$\leq \sup\{c,1\} \|q\|_{\mathcal{C}(\Omega;E^d);D,\nu}.$$

D'après la caractérisation des applications linéaires continues du théorème 1.25, ceci prouve que l'application $q \mapsto f$ est continue, et donc séquentiellement continue comme toute application continue (théorème A.29). □

Chapitre 10

Bibliographie

[1] ARCHIMÈDE, *Opere omnia*, J.-L. Heiberg, Teubner, 3 tomes, 1913–1915 (= *Les Œuvres complètes*, Desclée de Brouwer, Paris, 1921).

[2] ARZELÀ, C., Funzioni di linee, *Rend. Atti R. Accad. Lincei*, (4) 5, 1889, 342–348.

[3] ARZELÀ, C., Sulle funzioni di linee, *Mem. R. Accad. Sci. Ist. Bologna*, (5) 5, 1895, 55–74.

[4] ASCOLI, G., Le curve limiti di una varietà data di curve, *Atti R. Accad. Lincei*, Memorie della Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., (3) 18, 1883–1884, 521–586.

[5] BARROW, I., *Lectiones Geometricae*, Londini, 1670.

[6] BERNOULLI, J. (Jacob), Analysis problematis antehac propositi. De Inventione Lineæ descendus a corpore gravi percurrendæ uniformiter. *Opera*, 421–426. Cramer et Philibert, Genève, 1744.

[7] BERNOULLI, J. (Johann), Lectiones matematicæ de methodo integralium allisque (1691–1692), *Opera omnia* III, 385–559. Éd. originale, Bousquet, Lausanne et Genève, 1742 (= Olms, Hildesheim, 1968).

[8] BOCHNER, S., *Vorlesungen über Fouriersche Integrale*, Leipzig, Akad. Verlagsgesellschaft, 1932.

[9] BOCHNER, S., Integration von Funktionen deren Werte die Elemente eines Vektorraumes sind, *Fundamenta Mat.*, 20, 1933, 262–276.

[10] BOLZANO, B., Ein Analytischer Beweis der Lehrsatzes, daß zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetzes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege, *Abhandlungen K. Böhm. Gesell. Wissen.*, (3), 5, 1817, 1–6 (= en français, *Revue Hist. Sci.*, 17, 1964, 136–164).

[11] BOURBAKI, N., *Intégration*, Hermann, Paris, 1965.

[12] BOURBAKI, N., *Espaces vectoriels topologiques*, Hermann, nouvelle édition, Paris, 1967.

[13] BOURBAKI, N., *Variétés différentielles et analytiques : fascicule de résultats*, Hermann, Paris, 1971.

[14] BOURBAKI, N., *Éléments d'histoire des mathématiques*, Hermann, nouvelle édition, Paris, 1974.

[15] BOURBAKI, N., *Fonction d'une variable réelle*, Hermann, nouvelle édition, Paris, 1976.

[16] CAJORI, F., *A history of mathematical notations*, deux tomes, Open Court, Chicago, 1974.

[17] CANTOR, G., *Gesammelte Abhandlungen*, Springer, Berlin, 1932.

[18] CARTAN, E., *Œuvres complètes*, 6 volumes, Gauthier–Villars, Paris, 1953–1955.

[19] CARTAN, H., *Cours de calcul différentiel*, Hermann, édition refondue, Paris, 1977.

[20] CAUCHY, A., *Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique*, Debure, Paris, 1821.

[21] CAUCHY, A., *Résumé des leçons données à l'École Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal*, Debure, Paris, 1823.

[22] CAUCHY, A., *Mémoire sur les intégrales définies*, Bures frères, Paris, 1825.

[23] CLARKSON, J. A., Uniformly convex spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 40, 1936, 396–414.

[24] CLIFFORD, W. K., *Elements of dynamic*, disponible en Historical Math Monographs, Cornell University, 1878.

[25] CONDORCET, N., *Mémoire sur les équations aux différence partielles*, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, année 1770, Paris, 1773.

[26] CORIOLIS, G.-G., *Du calcul de l'effet des machines, ou considérations sur l'emploi des moteurs et sur leur évaluation, pour servir d'introduction à l'étude spéciale des machines*, Carilian–Gœury, Libraire des corps royaux des ponts et chaussées et des mines, Paris, 1829.

[27] D'ALEMBERT, J., *Réflexions sur la cause générale des vents*, David, Paris, 1747.

[28] DE RHAM, G., *Variétés différentiables*, Hermann, Paris, 1955.

[29] DREYFUSS, P., *Formes différentielles exactes et fermées dans* $\mathbb{R}^d$, Université Côte d'Azur, Nice, 2019.

[30] DU BOIS-REYMOND, P., Fortsetzung der Erläuterungen zu den Anfangsgründen der Variationsrechnung, *Mathematische Annalen*, 15, n° 2, 1879, 564–576.

[31] DUGUNDJI, J., *Topology*, Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1966.

[32] EDWARDS, R., *Functional analysis*, Holt, Rinehart and Winston, Toronto, 1965.

[33] EUCLIDE, *Elementorum Libri* XV, Apud Hieronymum de Marnef & Gulilmum Canellat, Paris, 1573 (= *Les œuvres d'Euclide*, trad. F. Peyrard (1819), A. Blanchard, Paris, 1966).

[34] EULER, L., *Institutiones calculi differentialis*, Mémoires de l'Académie de Berlin, Berlin, 1755.

[35] EULER, L., *Institutionum calculi integralis, Volumen Primum*, Acad. Imper. Sci. Petropoli, 1768.

[36] EULER, L., De formulis integrabilibus duplicatis, *Novi comentarii academiæ scientiarum Petropolitanæ*, 14, 1770, 72–103.

[37] FOURIER, J., *Théorie analytique de la chaleur*, Didot, Paris, 1822. Rééd. Gabay, Sceaux, 1988.

[38] FRÉCHET, M., Sur quelques points du calcul fonctionnel (thèse), *Rend. Palermo*, 22, 1906, 1–74.

[39] FUBINI, G., Sugli integrali multipli, *Atti Accad. Naz. Lincei*, 16, 1907, 608–614.

[40] GIRAULT, V. et RAVIART, P.-A., *Finite element methods for Navier–Stokes equations*, Springer, Berlin, 1986.

[41] GRÉGOIRE DE SAINT-VINCENT, P. (P. GERGORII A SANCTO VICENTIO), *Opus geometricum quadraturæ circuli et sectionum coni*, 2 vol., Antverpiæ, 1647.

[42] GREGORY, J., *James Gregory Tercentenary Memorial Volume, containing his correspondance with John Collins and his hitherto unpublished mathematical manuscripts*, éd. H. W. Turnbull, London, 1939.

[43] HAAR, A., Über die Variation der Doppelintegrale, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 149, n° 1/2, 1926, 1–18.

[44] HAAR, A., Zur Variationsrechnung, *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 8, n° 1, 1931/1932, 1–27.

[45] HATCHER, A., *Algebraic topology*, Cambridge University Press, 2002 [En ligne]. Disponible à l'adresse : http//www.math.cornell.edu/-hatcher.

[46] HEINE, E., Über trigonometrische Reihen, *J. Reine Angew. Math. (J. de Crelle)*, 71, 1870, 353–365.

[47] HEINE, E., Aus brieflichen Mittelheilungen (namentlich über Variationsrechnung), *Mathematische Annalen*, 2, 1870, 187–191.

[48] HEINE, E., Die Elemente der Functionenlehre, *J. Reine Angew. Math. (J. de Crelle)*, 74, 1872, 172–188.

[49] KOLMOGOROV, A. N., Zur Normierbarkeit eines allgemeinen topologischen linearen Raumes, *Studia Math.*, 5 (1934), 29–33 (= en anglais : *Selected works*, vol. 1, Dordrecht, Kluwer, 1991, 183–186).

[50] LADYZHENSKAYA, O. A., *The mathematical theory of viscous incompressible flow*, Gordon and Breach, Philadelphie, 1963.

[51] LAGRANGE, J., *Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables*, Nouveaux mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin, année 1772, Berlin, 1774, 185–221.

[52] LANG, S., *Real analysis*, Addison-Wesley, Massachusetts, 1969.

[53] LEBESGUE, H., *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, Gauthier-Villars, Paris, 1904.

[54] LEIBNIZ, W. G., Nova metodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus, *Acta Eruditorum*, 1884, 467–473

[55] LERAY, J., Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace, *Acta Math.*, 63, 1934, 193–248.

[56] LIONS, J.-L., *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod & Gauthier–Villars, Paris, 1969.

[57] MERCATOR, N., *Logarithmotechnia... cui nunc accedit vera quadratura hyperbolæ...*, Londini, 1668.

[58] NEPER, J., *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, Lyon, 1619.

[59] NEUMANN, J. VON, On complete topological linear spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 37, 1935, 1–20.

[60] NEWTON, I., *The mathematical papers*, vol. III, *1670–1673*, Cambridge University Press, Cambridge, 1969.

[61] OSTROGRADSKY, M., Dissertation (en russe), *Mémoires Acad. Sci. Saint-Pétersbourg, Sc. Math., Phys., Nat.*, 1, 1831, 19–53.

[62] PIER, J.-P., *Histoire de l'intégration*, Masson, Paris, 1996.

[63] POINCARÉ, H., *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, tome 3, Gauthier–Villars, Paris, 1899.

[64] RIEMANN, B., Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe, *Abh. K. Gesell. Wiss. Göttingen, Math. Classe*, 3, 1866-1867, 87–132

[65] RIEMANN, B., *Gesammelte mathematische Werke*, Teubner, 2e éd., 1892.

[66] RUDIN, W., *Principes d'analyse mathématique*, Ediscience, 1995 (en anglais, McGraw–Hill, 1953).

[67] SCHWARTZ, L., *Analyse, Topologie générale et analyse fonctionnelle*, Hermann, Paris, 1970.

[68] SCHWARTZ, L., *Analyse I. Théorie des ensembles et topologie*. Hermann, Paris, 1991.

[69] SCHWARZ, H. A., Zur integration der partiellen Differentialgleichung, *Journal reine angew. Math.*, 74, 1872, 218–253.

[70] SIMON, J., Démonstration constructive d'un théorème de G. de Rham, *C. R. Acad. Sci. Paris, sér. I*, 316, 1993, 1167–1172.

[71] SIMON, J., Primitives de distributions et applications, Rapport de Recherche 93-11, *Laboratoire de Mathématiques Appliquées, Université Blaise Pascal*, Clermont-Ferrand, 1993.

[72] SIMON, J., Representation of distributions and explicit antiderivatives up to the boundary, dans *Progress in partial differential equations: the Metz surveys 2*, M. Chipot ed., Longman, 1993, 201-205.

[73] SIMON, J., *Espaces de Banach, Fréchet, Hilbert et Neumann*, ISTE Editions, Londres, 2017.

[74] SIMON, J., *Espaces semi-normés*, à paraître.

[75] SIMON, J., *Plus sur les distributions*, à paraître.

[76] SMIRNOV, S. K., Decomposition of solenoidal vector charges into elementary solenoids and the structure of normal one-dimensional currents, *St. Petersburg Math. J.*, 5, 1993, n° 4, 841–867.

[77] STEGMANN, F. L., *Lehrbuch der Variationsrechnung und ihrer Anwendung bei Untersuchungen über das Maximum und Minimum*, J.G. Luckhardt, Kassel, 1854.

[78] TARTAR, L., *Topics in nonlinear analysis*, Publications mathématiques de l'Université d'Orsay, Orsay, 1978.

[79] THOMAE, J., *Abriss einer Theorie der complexen Funktionen und Thetafunktionen einer Veränderlichen*, Halle, Nebert, 1870.

[80] URYSOHN, P. S., Über die Mächtigkeit zusammenhängenden Mengen, *Math. Ann.*, 94, 1925, 262–295.

[81] VOLTERRA, V., *Leçons sur les fonctions de lignes*, Gauthier-Villars, Paris, 1913.

Chapitre 11

Index

D

E

F

U

V, W