Série Analyse pour les EDP

Volume 3

Distributions

—

Morceaux choisis :

Jacques SIMON

Table des matières

Introduction

Objectif. Ce livre est le troisième des six volumes d'un ouvrage dédié à la résolution d'équations aux dérivées partielles issues de la physique :

volume 1 : *Espaces de Banach, Fréchet, Hilbert et Neumann*
volume 2 : *Fonctions continues*
volume 3 : *Distributions*
volume 4 : *Espaces de Lebesgue et de Sobolev*
volume 5 : *Traces*
volume 6 : *Équations aux dérivées partielles*

Ce troisième volume a pour objet de construire l'espace des distributions, à valeurs réelles ou vectorielles, et d'en donner les principales propriétés utiles pour l'étude des équations aux dérivées partielles.

Public visé. Nous[1] avons cherché des méthodes simples nécessitant le bagage minimal pour rendre cet outil accessible au plus grand nombre — doctorants, étudiants de troisième cycle, ingénieurs — sans en restreindre la généralité… et même en généralisant certains résultats, ce qui destine ce livre également aux chercheurs.

Ceci nous a conduit à une approche peu classique privilégiant les semi-normes et les propriétés séquentielles, que ce soit de complétude, de compacité ou de continuité.

1. **Nous ?** *Nous*, c'est moi ! N'y voie pas, lecteur, une ambition royale, mais le *nous de modestie* (?), qui est l'usage dans l'édition scientifique lorsqu'un auteur parle de lui-même [Bénédicte DELAUNAY et Nicolas LAURENT, *Bescherelle, La grammaire pour tous*, Hatier, 2013, p. 248]. *C'est par modestie que les écrivains de Port-Royal l'avaient mis à la mode, pour éviter, disaient-ils, la vanité du moi* [Louis-Nicolas BESCHERELLE, *Dictionnaire universel de la langue française*, 1845].

Utilité des distributions. L'intérêt essentiel des distributions est de permettre la dérivation de toutes les fonctions continues ou intégrables, même celles qui ne sont pas dérivables, et d'étendre ainsi le champ d'application du calcul différentiel. Ceci est particulièrement utile pour la résolution des équations aux dérivées partielles.

À cette fin, on définit une famille d'objets, les distributions, ayant les propriétés suivantes :
— Toute fonction continue est une distribution.
— Toute distribution a des dérivées partielles, qui sont des distributions.
— Pour une fonction dérivable, on retrouve les dérivées classiques.
— Toute limite de distributions est une distribution.
— Toute suite de Cauchy de distributions a une limite.

Ces propriétés peuvent être résumées grossièrement en disant que l'espace $\mathcal{D}'$ des distributions est le *complété pour la dérivation* de l'espace $\mathcal{C}$ des fonctions continues. Cette construction, due à Laurent SCHWARTZ [68] et [71], est développée ici pour les distributions sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans un espace de Neumann E, c'est-à-dire un espace vectoriel semi-normé séparé séquentiellement complet, et donc en particulier à valeurs dans un espace de Banach ou de Fréchet.

Originalité. La recherche de méthodes simples[2] donnant des propriétés générales nous a conduit à :
— Considérer directement des *valeurs vectorielles*, c'est-à-dire construire $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ sans étude préalable des distributions réelles.
— Supposer E *séquentiellement complet*, c'est-à-dire de Neumann.
— Utiliser des *semi-normes* pour construire les topologies, de E, $\mathcal{D}(\Omega)$, $\mathcal{D}'(\Omega; E)$...
— Munir $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ de la *topologie simple*.
— Introduire la *pondération* pour généraliser la convolution aux domaines ouverts.
— Construire explicitement les *primitives*.
— *Séparer les variables* par une méthode « rustique ».
— Ne faire appel à l'*intégration* que pour les *fonctions continues*.

Abordons ces points qui emmènent hors des sentiers battus.

Valeurs vectorielles. Nous considérons les distributions à valeurs dans un espace de Neumann général E bien que les équations aux dérivées partielles issues de la physique soient en général à valeurs réelles. Ceci sert dans les équations d'évolution pour séparer le temps t de la variable d'espace x. Une distribution en t, x à valeurs réelles

2. **Faire simple.** C'était l'un des mantras préférés de Steve JOBS : « Faire simple peut être plus difficile que faire compliqué. Il faut travailler dur pour mettre ses idées au clair et faire simple. Mais ça vaut le coup en fin de compte parce que, lorsque vous y parvenez, vous pouvez déplacer des montagnes » [*BusinessWeek*, 1998].

est alors identifiée à une distribution en t à valeurs dans un espace E de distributions en x, par exemple à un élément de $\mathcal{D}'(]0,T[;E)$ où $E=\mathcal{D}'(\Omega)$, espace qui est lui-même de Neumann. Cette identification est rendue loisible par le fondamental *théorème des noyaux*, p. 310.

Pour les équations stationnaires, les distributions à valeurs réelles (c'est-à-dire le cas $E=\mathbb{R}$) suffisent. Nous traitons directement le cas où E est un espace de Neumann pour éviter des répétitions, la généralisation consistant souvent à remplacer $\mathbb{R}$ par E et la valeur absolue $|\ \ |$ par une semi-norme de E dans les énoncés et les démonstrations, lorsque l'on utilise des méthodes adéquates.

Spécificité du cas vectoriel. Les principales différences avec les distributions à valeurs réelles sont que, en général :
— L'espace $\mathcal{D}'(\Omega;E)$ n'est pas réflexif et sa topologie de la convergence simple sur $\mathcal{D}(\Omega)$ ne coïncide pas avec sa topologie faible.
— Les bornés de $\mathcal{D}'(\Omega;E)$ ne sont pas relativement compacts.
— Les distributions dans Ω ne sont pas d'ordre fini sur ses parties compactes ; elles ne peuvent pas toujours s'y exprimer comme dérivées d'ordre fini de fonctions continues.
— On peut séparer les variables en construisant une bijection de $\mathcal{D}'(\Omega_1\times\Omega_2;E)$ sur $\mathcal{D}'(\Omega_1;\mathcal{D}'(\Omega_2;E))$ (même pour une distribution réelle, c'est-à-dire pour $E=\mathbb{R}$, ceci fait intervenir des valeurs vectorielles, en l'occurrence dans $\mathcal{D}'(\Omega_2)$).

Complétude séquentielle. Nous supposons que E est un espace de Neumann, c'est-à-dire que toutes ses suites de Cauchy convergent, car c'est une condition essentielle pour que les fonctions continues soient des distributions, c'est-à-dire pour que $\mathcal{C}(\Omega;E)\subset\mathcal{D}'(\Omega;E)$, voir la section 3.4, *Le cas où E n'est pas de Neumann*, p. 53.

Cette propriété est plus simple que la complétude, c'est-à-dire que la convergence de tous les filtres de Cauchy, et, surtout, plus générale ; par exemple, si H est un espace de Hilbert de dimension infinie, H-faible est séquentiellement complet mais n'est pas complet [vol. 1, propriété (4.11), p. 82].

Elle est également plus simple et générale que la quasi-complétude, c'est-à-dire la complétude des parties bornées, utilisée par Laurent SCHWARTZ [71, p. 2, 50 et 52].

Semi-normes. Nous utilisons des familles de semi-normes plutôt que des topologies localement convexes, ce qui est équivalent, pour pouvoir définir $L^p(\Omega;E)$ au volume 4. En effet, on peut élever une semi-norme à une puissance p, pas un voisinage convexe !

Le maniement des espaces semi-normés est simple, bien que moins familier que celui des espaces topologiques : il suit celui des espaces normés, la différence principale consistant à travailler sur plusieurs (semi-)normes et non plus sur une seule norme. Par exemple, nous engendrons la topologie de $\mathcal{D}(\Omega)$ par la famille de semi-normes $\|\varphi\|_{\mathcal{D}(\Omega);p} = \sup_{x\in\Omega,\, |\beta|\le p(x)} p(x)|\partial^\beta\varphi(x)|$ indexées par $p \in \mathcal{C}^+(\Omega)$, ce qui est beaucoup plus simple que sa construction (équivalente) comme limite inductive des $\mathcal{D}_K(\Omega)$.

Topologie simple. Nous munissons $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ de la famille des semi-normes $\|f\|_{\mathcal{D}'(\Omega;E);\varphi,\nu} = \|\langle f, \varphi\rangle\|_{E;\nu}$ indexées par les $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et les $\nu \in \mathcal{N}_E$ (ensemble indexant les semi-normes de E), c'est-à-dire de la topologie de la convergence simple sur $\mathcal{D}(\Omega)$, car elle est adaptée à notre étude et… simple. Simplicité atteinte sans se limiter, comme dans beaucoup d'ouvrages, à une *pseudo-topologie*.

En outre, cette topologie a les mêmes suites convergentes et les mêmes bornés que la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de $\mathcal{D}(\Omega)$ utilisée par Laurent SCHWARTZ. Les motifs de notre choix sont détaillés p. 45.

Domaine ouvert et pondération. Nous considérons les distributions définies dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$. Celles-ci n'ayant pas nécessairement de prolongement dans tout $\mathbb{R}^d$, nous introduisons une opération, la pondération, qui joue pour Ω un rôle analogue à celui joué par la convolution pour $\mathbb{R}^d$ et qui intervient constamment.

La pondérée $f \diamond \mu$ d'une distribution f, définie dans un ouvert Ω, par un poids μ, poids qui est une distribution réelle dans $\mathbb{R}^d$ à support compact D, est une distribution définie dans l'ouvert $\Omega_D = \{x \in \mathbb{R}^d : x + D \subset \Omega\}$. Lorsque f et μ sont des fonctions, elle vaut $(f \diamond \mu)(x) = \int_{\mathring{D}} f(x+y)\mu(y)\,\mathrm{d}y$. Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^d$, on retrouve la convolution à une symétrie près sur μ, et on retrouve toutes ses propriétés à un signe éventuel près.

Primitives. Nous montrons qu'un champ de distributions $q = (q_1, \ldots, q_d)$ a une primitive f, c'est-à-dire que $\nabla f = q$, si et seulement si elle vérifie $\langle q, \psi\rangle = 0_E$ pour tous les champs tests $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_d)$ tels que $\nabla \cdot \psi = 0$. Nous déterminons explicitement toutes les primitives et nous en déterminons une qui dépend continûment de q.

Nous montrons également que, lorsque Ω est simplement connexe, il faut et il suffit que $\partial_i q_j = \partial_j q_i$ pour tout i et j.

Séparation des variables. Nous montrons que la séparation des variables est bijective de $\mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2; E)$ sur $\mathcal{D}'(\Omega_1; \mathcal{D}'(\Omega_2; E))$ à l'aide d'inégalités, certes laborieuses à établir mais qui évitent le recours aux difficiles propriétés topologiques utilisées par Laurent SCHWARTZ dans sa diabolique démonstration du théorème des noyaux.

L'intérêt de cette méthode est exposé dans le commentaire *Originalité…*, p. 315.

Intégration. L'intégration des fonctions continues est indispensable pour leur identification à des distributions par l'égalité $\langle f, \varphi \rangle = \int f\varphi$, pour toute fonction test φ. La théorie de l'intégration n'ayant pas été faite pour les valeurs dans un espace de Neumann, nous avons établi, au volume 2, les résultats relatifs aux fonctions uniformément continues suffisant à nos besoins. Nous les rappelons avant de les utiliser.

La théorie générale de l'intégration à valeurs dans un espace de Neumann sera faite, dans un prochain volume, dans le cadre des *distributions intégrables* qui jouent le rôle des habituelles *classes de fonctions intégrables presque partout égales.* En effet, il nous a paru plus simple de construire ainsi l'intégration générale.

Pré-requis. Les démonstrations dans le corps du texte ne font appel qu'à des définitions et des résultats établis aux volumes 1 et 2, rappelés en annexe ou dans le texte, avec les références de leurs démonstrations.

Ce livre est rédigé pour pouvoir être lu dans le désordre par un non-spécialiste : les démonstrations sont détaillées en incluant des arguments triviaux pour un connaisseur et les numéros des théorèmes utilisés sont systématiquement rappelés. Détails d'autant plus nécessaires[3] que la majorité des résultats sont des généralisations, nouvelles, aux fonctions et distributions à valeurs dans un espace de Neumann de propriétés classiques pour les valeurs dans un espace de Banach.

Je sollicite l'indulgence du lecteur pour la lourdeur qui peut en résulter.

Commentaires. Les commentaires composés en petits caractères peuvent, contrairement au corps du texte, faire appel à des résultats extérieurs ou non encore établis. L'annexe *Rappels* est, elle aussi, composée en petits caractères car elle peut être supposée connue.

Historique. L'origine des concepts et des résultats est, autant que possible, précisée en notes[4] de bas de page.

---

3. **Détails nécessaires.** Comme l'a expliqué Laurent SCHWARTZ en préambule à un de ses articles [70, p. 88] : « Bien que beaucoup de démonstrations soient relativement faciles, il nous a paru utile de les écrire *in extenso*, car toutes les fois qu'interviennent les espaces vectoriels topologiques, il y a de tels "pièges" qu'une grande rigueur est nécessaire. »
L'immense et rigoureux Augustin CAUCHY ayant, lui-même, donné un résultat faux, nous n'avons reculé devant aucun détail. Rappelons que c'est dans son remarquable *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique* de 1821 qu'il indique prouver « aisément » [18, p. 46] que, si une fonction réelle de deux variables réelles est continue par rapport à chacune des variables, elle est continue par rapport à leur couple. Il faudra attendre 1870 pour que Carl Johannes THOMAE [89, p. 15] montre que c'est inexact.

4. **Historique. Objectif.** Il s'agit avant tout de rendre hommage aux mathématiciens dont les travaux ont rendu possible et inspiré ce livre. Même si tous n'y sont pas, faute de place ou de connaissance. Et de montrer que les mathématiques sont une construction humaine, ancienne, pas une vérité révélée, et que derrière chaque théorème il y a un ou plusieurs hommes, contemporains ou ancêtres lointains qui — grecs inclus — raisonnaient aussi bien que nous, sans internet ni ordinateur, voire sans imprimerie ni papier.

Navigation dans le livre.
— La **table des matières**, en tête du livre, donne la liste des thèmes traités.
— L'**index**, p. 373, fournit un autre accès thématique.
— La **table des notations**, p. 369, précise leur sens en cas de doute.
— Les hypothèses sont, toutes, indiquées au sein des théorèmes eux-mêmes.
— La numérotation est commune à tous les énoncés afin de les retrouver aisément en suivant l'ordre des numéros (ainsi, le théorème 2.2 se trouve entre les énoncés 2.1 et 2.3, qui sont des définitions).

Remerciements. Je suis particulièrement redevable à Enrique FERNÁNDEZ-CARA qui a relu les innombrables versions successives de ce travail, sans se lasser et en me suggérant amicalement de non moins innombrables améliorations à chacune d'elles.

Fulbert MIGNOT m'a suggéré, entre autres, de précéder chaque chapitre d'une brève présentation. Ce fut salutaire : pour exposer la ligne directrice, il m'a fallu la dégager et réécrire plusieurs parties.

Les lectures méticuleuses et savantes d'Olivier BESSON, Didier BRESCH et Pierre DREYFUSS ont contribué à des améliorations très substantielles.

Jérôme LEMOINE, mon disciple — c'est un stigmate et une croix qu'il porte à vie — a eu pour mission de relire les démonstrations ; il est donc entièrement responsable des erreurs éventuelles… excepté, peut-être, celles que j'aurai ajoutées depuis.

Jacques BLUM a su me convaincre qu'il était temps de publier. En effet.

Merci, mes amis, pour votre aide et votre soutien chaleureux.

Jacques SIMON
Chapdes-Beaufort, le 30 septembre 2020

Les oubliés. Les Français sont probablement sur-représentés, comme ils le sont dans nos bibliothèques, dans nos enseignements et souvent dans nos cœurs. Parmi les Français, je suis sur-représenté, parce que ce livre est l'aboutissement de trente ans de travail pour simplifier et généraliser les distributions à valeurs vectorielles. Laurent SCHWARTZ, ma première source d'inspiration et d'admiration, est peut-être aussi sur-représenté car, ses traités n'étant pas pourvus de notices historiques, dû à sa grande modestie, je lui ai attribué la totalité de ce qu'ils contiennent. À l'inverse, Russes et Européens de l'Est sont probablement particulièrement sous-représentés, à cause de l'éloignement linguistique, aggravé par l'ignorance mutuelle entre l'Est et l'Ouest pendant la période soviétique.

Nouveautés. Au péril de l'immodestie, *nobody is perfect*, j'ai abondamment signalé les résultats que je crois nouveaux, tant pour éveiller la vigilance du lecteur — il n'est pas exclu que ce livre contienne quelque ânerie — que pour attirer son attention sur les outils nouveaux à sa disposition.

Appel au lecteur. Nombre de résultats importants n'ont pas de note historique, car j'en ignore tout. Je sollicite l'indulgence du lecteur pour ces lacunes et, surtout, pour les injustices qu'il pourra relever. Et je fais appel aux érudits pour me signaler les améliorations à apporter… pour les rééditions.

Chapitre 3

Espace des distributions

L'objet de ce chapitre est la construction de l'espace $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ des distributions sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans un espace de Neumann E. C'est l'espace des applications linéaires continues de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans E.

Nous le munissons (définition 3.1) des semi-normes $\|f\|_{\mathcal{D}'(\Omega;E);\varphi,\nu} = \|\langle f, \varphi\rangle\|_{E;\nu}$ indexées par $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\nu \in \mathcal{N}_E$, c'est-à-dire de la topologie de la convergence simple sur $\mathcal{D}(\Omega)$. Nous donnons ensuite diverses caractérisations des distributions (théorème 3.4), puis nous identifions toute fonction continue à une distribution (théorème 3.8).

Au § 3.4, nous montrons que, si E n'est pas un espace de Neumann, c'est-à-dire s'il n'est pas séquentiellement complet, cette construction ne donne pas les propriétés attendues, car les fonctions continues ne sont pas toutes (identifiables à) des applications de $\mathcal{L}(\mathcal{D}(\Omega); E)$, applications qu'il ne faut donc plus appeler «distributions».

Enfin, au § 3.5, nous construisons l'espace $\mathcal{M}(\Omega; E)$ des mesures et nous l'identifions à un sous-espace de $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ qui contient $\mathcal{C}(\Omega; E)$ (théorèmes 3.18 et 3.21).

3.1. Espace $\mathcal{D}'(\Omega; E)$

Définissons l'espace des distributions[1].

---

1. **Historique de l'espace des distributions. Distributions réelles dans $\mathbb{R}^d$.** Laurent SCHWARTZ définit les distributions réelles sur $\mathbb{R}^d$ en 1945 [67, définition 2, p. 60], comme étant les applications linéaires séquentiellement continues sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ muni des suites convergentes au sens du théorème 2.13 (b). Il munit l'espace des distributions de la topologie de la convergence uniforme sur les $\mathcal{D}_K(\mathbb{R}^d)$. En 1950, il définit les distributions comme étant les applications linéaires continues sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ [68, p. 24], en vérifiant que cela coïncide avec la définition antérieure, et il nota $(\mathcal{D}')$ leur espace. Il décrivit la génèse de cette invention dans son autobiographie, *Un mathématicien aux prises avec le siècle* [74].

Distributions réelles dans un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Laurent SCHWARTZ indiqua en 1950 [68, p. 26] «on pourra étudier les distributions sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$», tout en se limitant à donner leur définition. Ce cas a été étudié par de nombreux auteurs, par exemple John HORVÁTH en 1966 [44] ou François TREVES en 1967 [90]. Nous n'indiquerons pas l'historique des généralisations à un tel ouvert lorsqu'elle s'obtiennent en reprenant les démonstrations de SCHWARTZ, ce qui est souvent le cas, mais pas toujours.

Définition 3.1. — *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et E un espace de Neumann, dont la famille de semi-normes est notée $\{\| \ \|_{E;\nu} : \nu \in \mathcal{N}_E\}$.*

*On appelle **distribution**, sur Ω à valeurs dans E, toute application linéaire continue de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans E.*

On note $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ l'espace vectoriel des distributions sur Ω à valeurs dans E muni des semi-normes, indexées par $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\nu \in \mathcal{N}_E$,

$$\|f\|_{\mathcal{D}'(\Omega;E);\varphi,\nu} \overset{\text{def}}{=} \|\langle f, \varphi\rangle\|_{E;\nu}. \ \blacksquare$$

On note $\langle f, \varphi\rangle$ la valeur $f(\varphi)$ d'une distribution f appliquée à φ. On la note $\langle f, \varphi\rangle_\Omega$ où $\langle f, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega;E)\times\mathcal{D}(\Omega)}$ quand on veut préciser le domaine ou les espaces considérés. On note

$$\mathcal{D}'(\Omega) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R}).$$

Exemples de distributions. — À toute fonction continue $f \in \mathcal{C}(\Omega; E)$ on associe (théorème 3.5, p. 49) la distribution $\bar{f} \in \mathcal{D}'(\Omega; E)$ définie par

$$\langle \bar{f}, \varphi\rangle \overset{\text{def}}{=} \int_\Omega f\varphi.$$

— La masse de Dirac δ_x en un point x est (définition 3.14, p. 59) la distribution réelle valant

$$\langle \delta_x, \varphi\rangle \overset{\text{def}}{=} \varphi(x). \tag{3.1}$$

Plus généralement, à toute mesure $f \in \mathcal{M}(\Omega; E)$ on associe (théorème 3.15, p. 60) une distribution $\bar{f} \in \mathcal{D}'(\Omega; E)$, qui est la restriction de f à $\mathcal{D}(\Omega)$.

— À la fonction « singulière » $x \mapsto |x|^{-\lambda}$, où $0 < \lambda < d$, qui devient infinie au voisinage de 0, on associe (théorème 9.5, p. 195) la distribution sur tout $\mathbb{R}^d$, $\bar{f} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, définie par

$$\langle \bar{f}, \varphi\rangle \overset{\text{def}}{=} \lim_{\epsilon\to 0} \int_{x\in\mathbb{R}^d : |x|>\epsilon} |x|^{-\lambda}\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

— L'écoulement incompressible $\vec{\delta}_\Gamma \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ « concentré » sur un lacet $\Gamma \in \mathcal{C}^1([0,1]; \mathbb{R}^d)$ est la distribution définie, p. 242, par

$$\langle \vec{\delta}_\Gamma, \varphi\rangle \overset{\text{def}}{=} \int_0^1 (\varphi\circ\Gamma)\,\Gamma'. \ \square$$

Valeurs vectorielles. Laurent SCHWARTZ introduisit en 1957 [71, I, définition, p. 49] les distributions sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans un *espace vectoriel topologique localement convexe séparé* (ce qui équivaut à *semi-normé séparé*), qu'il suppose en général *quasi-complet* [71, p. 50].

Originalité de la définition 3.1. Les espaces de Neumann, c'est-à-dire *séquentiellement complets*, considérés ici sont plus généraux que les espaces *quasi-complets*.

Précurseurs. Sergei SOBOLEV fut le premier à définir explicitement et rigoureusement les distributions, et en particulier leurs dérivées [86, p. 62]. Auparavant, S. BOCHNER les avait utilisées implicitement [4].
La *Préhistoire de la théorie des distributions* a été écrite par Jesper LÜTZEN [54], et longuement explorée par Anne-Sandrine PAUMIER [58] ... que je n'ai malheureusement pas eu le temps de lire, ni l'un ni l'autre.

Exemples d'espaces des valeurs. Les espace suivants sont **de Neumann**, ce qui permet, par exemple dans les problèmes d'évolution, d'utiliser des espaces du type $\mathcal{D}'(]0, T[; E)$ où E est l'un d'entre eux :

— Les espaces de Lebesgue et de Sobolev $L^p(\Omega)$ et $W^{m,p}(\Omega)$ et leurs variantes *locales* $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ et $W^{m,p}_{\text{loc}}(\Omega)$, pour $1 \le p \le \infty$ et m entier positif ou négatif (nous le verrons au volume 4).

— Les espaces $L^p(\Omega)\text{-faible}$, $L^p_{\text{loc}}(\Omega)\text{-faible}$, $W^{m,p}(\Omega)\text{-faible}$ et $W^{m,p}_{\text{loc}}(\Omega)\text{-faible}$, pour $1 < p < \infty$ et m entier positif ou négatif (volume 4, à nouveau).

— L'espace $L^\infty(\Omega)\text{-}{*}\text{faible}$ (volume 4, encore).

— Les espaces de fonctions continûment dérivables $\mathcal{C}^m(\Omega)$, $\mathcal{C}^m_{\text{b}}(\Omega)$, $\mathbf{C}^m_{\text{b}}(\Omega)$, $\mathcal{C}^m_K(\Omega)$ et $\mathcal{K}^m(\Omega)$, pour $m \in \mathbb{N}$ ou $m = \infty$, [vol. 2, théorème 2.24].

— Les espaces $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\Omega)$ des distributions et des fonctions tests (théorèmes 4.5 et 2.8).

— Les espaces $\mathcal{M}(\Omega)$ des mesures et $\mathcal{M}_{\text{b}}(\Omega)$ des mesures bornées (volume 4).

— L'espace $E\text{-faible}$, quand E est un espace de Hilbert, ou réflexif, ou semi-réflexif [vol. 1, théorèmes 17.7 et 17.12].

— Les duals E', E'', E''', $\ldots$ d'un espace E normé ou semi-normé métrisable [vol. 1, théorème 13.8 (a) et propriété (17.3), p. 272].

— Les duals $E'\text{-faible}$, $E''\text{-faible}$, $E'''\text{-faible}$, $\ldots$ d'un espace E de Hilbert ou réflexif [vol. 1, propriété (17.6), p. 272].

— Les duals $E'\text{-}{*}\text{faible}$, $E''\text{-}{*}\text{faible}$, $E'''\text{-}{*}\text{faible}$, $\ldots$ d'un espace E de Hilbert, ou de Banach, ou de Fréchet, ou réflexif [vol. 1, théorème 13.8 (b) et propriétés (17.4) et (17.6)].

— Tous leurs sous-espaces fermés ou séquentiellement fermés (théorème A.24).

ATTENTION. Les semi-normes de la définition 3.1 engendrent une **topologie distincte de celle introduite et utilisée par** Laurent SCHWARTZ sur $\mathcal{D}'(\Omega; E)$, à savoir la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de $\mathcal{D}(\Omega)$. Lorsque (dans les commentaires) nous munirons $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ de ladite topologie, nous le noterons $\mathcal{D}'(\Omega; E)\text{-unif}$ pour éviter les confusions. Le rapport entre ces topologies est précisé dans le commentaire *Topologie de Schwartz*, p. 45. ☐

Montrons que $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ est séparé (nous verrons au théorème 4.5 que c'est un espace de Neumann).

Théorème 3.2. — *L'espace $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ est semi-normé séparé, pour tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ et tout espace de Neumann E.* ▮

Démonstration. Par définition 1.1 d'un espace séparé, il s'agit de vérifier qu'une distribution f est nulle quand toutes ses semi-normes le sont. Soit donc $f \in \mathcal{D}'(\Omega; E)$ telle que, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et toute semi-norme $\| \ \|_{E;\nu}$ de E,

$$\|f\|_{\mathcal{D}'(\Omega;E);\varphi,\nu} = \|\langle f, \varphi\rangle\|_{E;\nu} = 0.$$

Puisque E est séparé, comme tout espace de Neumann (définition 1.4),

$$\langle f, \varphi\rangle = 0_E.$$

Donc,

$$f = 0. \ \square$$

Caractérisons les distributions (d'autres caractérisations sont données au théorème 3.4).

Théorème 3.3. — *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et E un espace de Neumann. Alors,*

$$f \in \mathcal{D}'(\Omega; E)$$

si et seulement si : f est une application linéaire de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans E et, pour toute semi-norme $\| \ \|_{E;\nu}$ de E, il existe $p \in \mathcal{C}^+(\Omega)$ et $c \in \mathbb{R}$ tels que, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\|\langle f, \varphi\rangle\|_{E;\nu} \leq c\|\varphi\|_{\mathcal{D}(\Omega);p}.$$

C'est-à-dire,

$$\|\langle f, \varphi\rangle\|_{E;\nu} \leq c \sup_{x\in\Omega} \sup_{0\leq|\beta|\leq p(x)} p(x)|\partial^\beta \varphi(x)|. \ \blacksquare$$

Démonstration. ***1º*** *Première inégalité.* Cette inégalité résulte de la caractérisation des applications linéaires continues du théorème 1.12 (b), puisqu'une distribution f est, par définition 3.1, une application linéaire continue de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans E, et puisque la famille de semi-normes de $\mathcal{D}(\Omega)$ est filtrante (théorème 2.7).

2º *Seconde inégalité.* Cette inégalité est la ré-écriture de la première avec la définition 2.5 des semi-normes de $\mathcal{D}(\Omega)$. $\square$

Motivation de l'introduction des distributions. L'intérêt principal des distributions est de fournir un cadre général pour modéliser de nombreux concepts physiques et pour résoudre les équations aux dérivées partielles les gouvernant, ce que nous verrons au volume 6.

Les espaces de fonctions n'y suffisent pas, d'une part parce qu'un concept comme une masse n'est pas représentable par une fonction, alors qu'il l'est par la masse de Dirac introduite en (3.1), p. 42, et d'autre part parce qu'une équation comme celle de Poisson $-\Delta u = f$ avec $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ peut ne pas être satisfaite au sens des fonctions dérivables tout en l'étant au sens des distributions, voir p. 264. $\square$

Motivation de l'étude des distributions à valeurs vectorielles. Pour résoudre les équations stationnaires, on utilisera seulement des distributions à valeurs réelles, en revanche, pour les équations d'évolution, on utilisera des distributions en temps à valeurs dans des espaces de distributions en espace.

Ces espaces de valeurs seront souvent de Hilbert (par exemple, pour les équations de Navier–Stokes linéarisées, on obtient la vitesse u dans $L^2(0, T; (L^2(\Omega))^d)$), mais parfois de Fréchet (pour ces mêmes équations, la pression p appartient à $W^{-1,\infty}(0, T; (L^2_{\text{loc}}(\Omega))^d)$), voire de Neumann (quand on transite par $\mathcal{D}'(0, T; (\mathcal{D}'(\Omega))^d)$ pour arriver aux résultat ci-dessus). □

Distributions à valeurs dans un espace vectoriel topologique localement convexe séparé. L'espace E peut être n'importe quel espace vectoriel topologique localement convexe séparé et séquentiellement complet, puisque toute topologie localement convexe sur un espace vectoriel peut être engendrée par une famille de semi-normes, d'après un **théorème de von Neumann** [NEUMANN, 55, th. 26, p. 19]. □

Cas où E est complet ou quasi-complet. La définition 3.1 englobe le cas où E est un espace semi-normé complet, puisqu'il est alors séquentiellement complet, voir par exemple [SCHWARTZ, 72, p. 251]. Elle englobe de même le cas où E est quasi-complet, c'est-à-dire où ses parties bornées sont complètes, qui est l'hypothèse utilisée par Laurent SCHWARTZ [71, p. 2, 50 et 52]. □

Intérêt de supposer E séquentiellement complet plutôt que complet. Un espace semi-normé est dit *complet* si tout filtre de Cauchy converge [SCHWARTZ, 72, chap. XVIII, § 8, définition 1, p. 251]. Nous n'utilisons pas cette notion, car séquentiellement complet nous suffit, est beaucoup plus simple et est plus général (complet entraîne séquentiellement complet) et, surtout, car certains espaces utiles sont séquentiellement complets mais non complets. C'est, par exemple, le cas de tout espace de Hilbert ou de Banach réflexif de dimension infinie muni de sa topologie faible, comme on l'a signalé au volume 1 [80, propriété (4.11), p. 82]. □

Intérêt de supposer E séquentiellement complet plutôt que quasi-complet. C'est le défaut de complétude de nombreux espaces que l'on vient de signaler qui a amené Laurent SCHWARTZ à supposer [71, p. 55] que l'espace E des valeurs est quasi-complet, c'est-à-dire que ses parties bornées sont complètes. En effet, tout espace semi-réflexif muni de sa topologie faible est quasi-complet [SCHAEFER, 66, résultat 5.5, p. 144], ce qui permet de conclure dans le cas signalé dans le commentaire précédent.

Mais, ici encore, séquentiellement complet est beaucoup plus simple, et est plus général. En effet, *quasi-complet* entraîne *séquentiellement complet*, mais l'inverse est faux. Par exemple, l'espace vectoriel des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans lui-même telles que l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}$ soit dénombrable muni de la convergence simple est séquentiellement complet mais pas quasi-complet [SIMON, 83, à paraître]. □

Motivation du choix de la topologie simple. Nous munissons $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ de la **topologie simple**, c'est-à-dire de la convergence simple sur $\mathcal{D}(\Omega)$, car elle est… simple : ses semi-normes

$$\|f\|_{\mathcal{D}'(\Omega;E);\varphi,\nu} = \|\langle f, \varphi\rangle\|_{E;\nu}$$

sont indexées par $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\nu \in \mathcal{N}_E$, ce qui ne fait pas intervenir la topologie de $\mathcal{D}(\Omega)$.

Au contraire, la **topologie uniforme** utilisée par Laurent SCHWARTZ fait intervenir la topologie de $\mathcal{D}(\Omega)$, *via* ses bornés, dans ses semi-normes (voir (3.2), ci-dessous) et donc pour chaque opération, convergence, bornage ou autre. Ce qui est moins simple que la topologie simple et n'apporte aucune propriété supplémentaire pour l'étude des edp, puisque ses suites convergentes, ses bornés et ses compacts sont identiques [SIMON, 84, à paraître].

Un autre motif en faveur de la topologie simple est qu'elle est plus faible que la topologie uniforme, ce qui permet de plonger topologiquement plus d'espaces fonctionnels dans $\mathcal{D}'(\Omega; E)$, et donc d'élargir leur champ d'utilisation. □

Topologie de Schwartz. La topologie dont nous munissons $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ **n'est pas** la topologie introduite et utilisée par Laurent SCHWARTZ. Rappelons qu'il considère l'espace vectoriel topologique, que nous notons $\mathcal{D}'(\Omega; E)\text{-unif}$ pour éviter toute confusion muni de la *topologie de la convergence uniforme sur les bornés de* $\mathcal{D}(\Omega)$ [71, chap. I, § 2 p. 50] (en fait, il considère la cas où $\Omega = \mathbb{R}^d$). Elle est engendrée par les semi-normes, indexées par les bornés $\mathcal{B}$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ et $\nu \in \mathcal{N}_E$,

$$\|f\|_{\mathcal{D}'(\Omega;E)\text{-unif};\mathcal{B},\nu} \overset{\text{def}}{=} \sup_{\varphi \in \mathcal{B}} \|\langle f, \varphi\rangle\|_{E;\nu}. \tag{3.2}$$

Nous l'appellerons **topologie uniforme**. C'est la topologie de $\mathcal{L}(\mathcal{D}(\Omega); E)$ (définition A.36).

Notre topologie simple et la topologie uniforme, et donc les espaces $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ et $\mathcal{D}'(\Omega; E)\text{-unif}$, ont les mêmes suites convergentes (théorème 8.28) et les mêmes bornés et elles coïncident sur les parties bornés [SIMON, 84], à paraître. Les espaces $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ et $\mathcal{D}'(\Omega; E)\text{-unif}$ ont donc également les mêmes compacts et les mêmes applications séquentiellement continues. En revanche, ils n'ont ni les mêmes ouverts ni les mêmes applications continues [SIMON, 84]. La topologie uniforme donne donc des résultats topologiques plus forts : $\mathcal{D}'(\Omega)\text{-unif}$ est réflexif, alors que $\mathcal{D}'(\Omega)$ est seulement semi-réflexif.

Dans le cas particulier des distributions à valeurs réelles, c'est-à-dire de $\mathcal{D}'(\Omega)$, la *topologie simple* coïncide avec la *topologie uniforme faible*, c'est-à-dire

$$\mathcal{D}'(\Omega) \leftrightarrows (\mathcal{D}'(\Omega)\text{-unif})\text{-faible}.$$

En effet la topologie de Schwartz est celle de $(\mathcal{D}(\Omega))'$, sa topologie faible est celle de $(\mathcal{D}(\Omega))'\text{-faible}$, et notre topologie simple est celle de $(\mathcal{D}(\Omega))'\text{-}{*}\text{faible}$. Ces deux dernières topologies coïncident, car $\mathcal{D}(\Omega)$ est réflexif [SCHWARTZ, 68, théorème XIV, p. 75] et car [volume 1, théorème 17.21], pour tout espace semi-normé séparé E réflexif,

$$E'\text{-faible} \leftrightarrows E'\text{-}{*}\text{faible}.$$

En général, et plus précisément lorsque E ne coïncide pas avec E-faible, la topologie simple de $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ ne coïncide pas avec la topologie uniforme faible : elle est intermédiaire entre la topologie uniforme et la topologie uniforme faible (elle est « *faible en* Ω, *mais pas en* E »), c'est-à-dire [SIMON, 84]

$$\mathcal{D}'(\Omega; E)\text{-unif} \subsetneq \mathcal{D}'(\Omega; E) \subsetneq (\mathcal{D}'(\Omega; E)\text{-unif})\text{-faible}. \ \square$$

3.2. Caractérisations des distributions

Montrons que toute application linéaire séquentiellement continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$, ou sur tous les $\mathcal{C}^\infty_K(\Omega)$, est une distribution[2], et d'autres caractérisations.

Théorème 3.4. — *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^d$, E *un espace de Neumann et*

f une application linéaire de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans E.

2. **Historique du théorème 3.4 (d).** Laurent SCHWARTZ démontra en 1950 [68, chap. III, § 1, théorème III, p. 66] qu'une application linéaire de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ dans un espace vectoriel topologique localement convexe est continue si et seulement si elle est continue sur les $\mathcal{C}^\infty_K(\mathbb{R}^d)$.
La démonstration faite ici est nouvelle : alors que SCHWARTZ utilise le fait que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est bornologique et tonnelé, puisque c'est une limite inductive d'espaces de Fréchet, nous utilisons les *théorèmes de contrôle de normes des* $\mathcal{C}^m_K(\Omega)$ (théorème 2.22, *via* le théorème 2.25).

Historique du théorème 3.4 (e). Qu'une application linéaire bornée dans tout borné de $\mathcal{C}^\infty_K(\Omega)$ soit une distribution nous semble un énoncé nouveau, avec une démonstration nouvelle.

Alors, chacune des propriétés suivantes est équivalente à

$$f \in \mathcal{D}'(\Omega; E).$$

(a) *f est continue de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans E.*

(b) *f est séquentiellement continue de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans E.*

(c) *Pour tout compact $K \subset \Omega$, f est séquentiellement continue de $\mathcal{C}^\infty_K(\Omega)$ dans E.*

(d) *Pour tout compact $K \subset \Omega$, f est continue de $\mathcal{C}^\infty_K(\Omega)$ dans E.*

(e) *Pour tout compact $K \subset \Omega$, f est bornée dans tout borné de $\mathcal{C}^\infty_K(\Omega)$.* ▮

Complément au théorème 3.4. La caractérisation (b) équivaut à « f est séquentiellement continue de $\mathcal{K}^\infty(\Omega)$ dans E », puisque $\mathcal{K}^\infty(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\Omega)$ ont les mêmes suites convergentes, voir le commentaire *Autre topologie*, p. 24. □

Caractère bornologique de $\mathcal{D}(\Omega)$. La caractérisation (e) du théorème 3.4 équivaut à « $\mathcal{D}(\Omega)$ est un espace bornologique », car un tel espace est caractérisé par « toute application linéaire transformant les bornés en bornés y est continue » [BOURBAKI, 8, proposition 5, p. 10, et commentaire, p. 11]. En effet, un ensemble est borné dans $\mathcal{D}(\Omega)$ si et seulement s'il est borné dans un des $\mathcal{C}^\infty_K(\Omega)$. □

Démonstration du théorème 3.4. Procédons par étapes, en notant $\{\| \, \|_{E;\nu} : \nu \in \mathcal{N}_E\}$ la famille de semi-normes de E.

1º *$f \in \mathcal{D}'(\Omega; E) \Leftrightarrow$ continue dans $\mathcal{D}(\Omega)$.* C'est la définition 3.1 d'une distribution.

2º *Continue dans $\mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow$ séquentiellement continue dans $\mathcal{D}(\Omega)$.* La continuité entraîne toujours la continuité séquentielle (théorème 1.10).

3º *Séquentiellement continue dans $\mathcal{D}(\Omega) \Rightarrow$ séquentiellement continue dans $\mathcal{C}^\infty_K(\Omega)$.* Ceci résulte (théorème A.29) de l'inclusion $\mathcal{C}^\infty_K(\Omega) \underset{\to}{\subseteq} \mathcal{D}(\Omega)$ (théorème 2.10).

4º *Séquentiellement continue dans $\mathcal{C}^\infty_K(\Omega) \Rightarrow$ continue dans $\mathcal{C}^\infty_K(\Omega)$.* Ceci résulte (théorème 1.11) de ce que $\mathcal{C}^\infty_K(\Omega)$ est métrisable (théorème A.53).

5º *Continue dans les $\mathcal{C}^\infty_K(\Omega) \Rightarrow f \in \mathcal{D}'(\Omega; E)$.* Supposons que, pour tout compact K inclus dans Ω, f soit continue de $\mathcal{C}^\infty_K(\Omega)$ dans E.

La caractérisation des applications linéaires continues du théorème 1.12 (b) montre, puisque $\mathcal{C}^\infty_K(\Omega)$ est (par définition 2.3 (a)) muni de la famille de semi-normes de $\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}(\Omega)$ qui est filtrante (théorème A.52) que, pour tout $\nu \in \mathcal{N}_E$, il existe $m_{K,\nu} \in \mathbb{N}$ et $c_{K,\nu} \in \mathbb{R}$ tels que, pour toute $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_K(\Omega)$,

$$\|\langle f, \varphi\rangle\|_{E;\nu} \leq c_{K,\nu} \|\varphi\|_{\mathcal{C}^\infty_{\mathrm{b}}(\Omega); m_{K,\nu}}.$$

Puisque $\|\varphi\|_{\mathcal{C}_{\mathrm{b}}^{\infty}(\Omega);m_{K,\nu}} = \|\varphi\|_{\mathcal{C}_{\mathrm{b}}^{m_{K,\nu}}(\Omega)}$, le second théorème de contrôle de normes des $\mathcal{C}_K^m(\Omega)$ (théorème 2.25, relatif à $\pi(\varphi) = \|\langle f, \varphi\rangle\|_{E;\nu}$) montre alors que, pour tout $\nu \in \mathcal{N}_E$, il existe $p_\nu \in \mathcal{C}^+(\Omega)$ telle que, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\|\langle f, \varphi\rangle\|_{E;\nu} \leq \|\varphi\|_{\mathcal{D}(\Omega);p_\nu}.$$

Donc (théorème 3.3), $f \in \mathcal{D}'(\Omega; E)$.

Ces étapes **1º** à **5º** prouvent l'équivalence de $f \in \mathcal{D}'(\Omega; E)$ avec (a), (b), (c) et (d).

6º *Séquentiellement continue dans* $\mathcal{C}_K^\infty(\Omega) \Leftrightarrow$ *bornée dans tout borné de* $\mathcal{C}_K^\infty(\Omega)$. Toute application linéaire séquentiellement continue transformant les bornés en bornés (théorème A.37), il reste à établir la réciproque.

Supposons donc que

$$f \text{ transforme les bornés de } \mathcal{C}_K^\infty(\Omega) \text{ en bornés de } E \tag{3.3}$$

et soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers φ dans $\mathcal{C}_K^\infty(\Omega)$. Les caractérisations (b) et (c) des suites convergentes de $\mathcal{C}_K^\infty(\Omega)$ données au théorème 2.13 étant équivalentes, une telle suite peut s'écrire sous la forme

$$\varphi_n - \varphi = t_n \phi_n, \text{ où } t_n \to 0 \text{ dans } \mathbb{R} \text{ et } \{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ est borné dans } \mathcal{C}_K^\infty(\Omega).$$

D'après (3.3), $\{\langle f, \phi_n\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}$ est borné dans E, c'est-à-dire que, pour tout $\nu \in \mathcal{N}_E$,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\langle f, \phi_n\rangle\|_{E;\nu} = c_\nu \text{ est fini.}$$

Alors, $\|\langle f, \varphi_n - \varphi\rangle\|_{E;\nu} \leq t_n c_\nu$, qui tend vers 0 quand $n \to \infty$. D'où,

$$\langle f, \varphi_n\rangle \to \langle f, \varphi\rangle \text{ dans } E.$$

Donc,

$$f \text{ est séquentiellement continue de } \mathcal{C}_K^\infty(\Omega) \text{ dans } E.$$

Ainsi, (e) équivaut à (c), et donc à $f \in \mathcal{D}'(\Omega; E)$. $\square$

3.3. Inclusion de $\mathcal{C}(\Omega; E)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega; E)$

Associons une distribution $\overline{f}$ à chaque fonction continue f[3].

3. **Historique de l'identification d'une fonction continue à une distribution.** Laurent SCHWARTZ identifia en 1945 [67, p. 60] toute fonction sommable, et *a fortiori* toute fonction continue, à une distribution. Il démontra en 1950 [68, chap. III, § 3, théorème XVI, p. 76] que la convergence uniforme sur les compacts de fonctions continues entraîne leur convergence au sens des distributions, ce qu'il avait énoncé en 1945.

Théorème 3.5. — *Soit $f \in \mathcal{C}(\Omega; E)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et E est un espace de Neumann.*

On définit $\overline{f} \in \mathcal{D}'(\Omega; E)$ par : pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\langle \overline{f}, \varphi \rangle \overset{\text{def}}{=} \int_\Omega f\varphi. \blacksquare$$

Démonstration. ***1º** Sens de l'intégrale.* L'intégrale de $f\varphi$ a un sens, d'après la définition 1.22 de l'intégrale à valeurs dans un espace de Neumann, car $f\varphi$ est uniformément continue à support borné, c'est-à-dire qu'elle appartient à $\mathcal{B}(\Omega; E)$ (définition 1.21).

Ceci résulte, d'après un corollaire (théorème A.33) du théorème de Heine, de ce que $f\varphi$ est continue (comme tout produit de fonctions continues, voir théorème A.60) à support compact (d'après le théorème 2.2 (a), puisqu'elle est nulle hors du support de φ, qui est un compact inclus dans Ω).

***2º** Obtention d'une distribution.* Montrons que $\overline{f}$ satisfait la caractérisation des distributions du théorème 3.3. Étant donné une semi-norme $\| \ \|_{E;\nu}$ de E, on définit $p \in \mathcal{C}^+(\Omega)$ par

$$p(x) = (2 + |x|)^{d+2} \|f(x)\|_{E;\nu}. \tag{3.4}$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\omega = \Omega \cap B$, où B est n'importe quelle boule ouverte contenant le support de φ. Seul ω contribue à l'intégrale de $f\varphi$ d'après le théorème A.77, donc la majoration des semi-normes de l'intégrale du théorème 1.23 (a) donne

$$\Big\| \int_\Omega f\varphi \Big\|_{E;\nu} = \Big\| \int_\omega f\varphi \Big\|_{E;\nu} \le \int_\omega \|f\|_{E;\nu} |\varphi| = \int_\omega \frac{p(x)|\varphi(x)|}{(2 + |x|)^{d+2}} \, \mathrm{d}x.$$

Puisque $\int_\omega 1/(2 + |x|)^{d+2} \, \mathrm{d}x \le 2^{d+1}$ (lemme A.82), la croissance de l'intégrale réelle (théorème A.76 (a)) et sa linéarité donnent

$$\Big\| \int_\Omega f\varphi \Big\|_{E;\nu} \le 2^{d+1} \sup_{x \in \Omega} p(x) |\varphi(x)|. \tag{3.5}$$

D'où,

$$\Big\| \int_\Omega f\varphi \Big\|_{E;\nu} \le 2^{d+1} \sup_{x \in \Omega} \sup_{0 \le |\beta| \le p(x)} p(x) |\partial^\beta \varphi(x)|.$$

C'est-à-dire, avec la définition 2.5 des semi-normes de $\mathcal{D}(\Omega)$,

$$\|\langle \overline{f}, \varphi \rangle\|_{E;\nu} \le 2^{d+1} \|\varphi\|_{\mathcal{D}(\Omega);p}.$$

L'application $\overline{f}$ étant linéaire, puisque l'intégrale est linéaire (théorème A.74), cette inégalité entraîne, d'après la caractérisation des distributions du théorème 3.3, que

$$\overline{f} \in \mathcal{D}'(\Omega; E). \ \square$$

Montrons que deux fonctions continues distinctes fournissent des distributions distinctes, ce qui permettra d'identifier chaque fonction continue à une distribution.

Théorème 3.6. — *L'application* $f \mapsto \overline{f}$ *donnée par le théorème 3.5 est linéaire, injective et continue, et donc séquentiellement continue, de* $\mathcal{C}(\Omega; E)$ *dans* $\mathcal{D}'(\Omega; E)$. ▮

Démonstration. ***1º** Injectivité.* Soit $f \in \mathcal{C}(\Omega; E)$ telle que

$$\overline{f} = 0.$$

C'est-à-dire, par définition de $\overline{f}$, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\int_\Omega f\varphi = 0_E.$$

Le lemme de Du Bois-Reymond à valeurs dans un espace de Neumann (théorème 3.7, ci-après) donne alors

$$f = 0.$$

L'application $f \mapsto \overline{f}$, étant linéaire, est donc injective.

***2º** Continuité.* Notons $\{\| \ \|_{E;\nu} : \nu \in \mathcal{N}_E\}$ la famille de semi-normes de E. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\nu \in \mathcal{N}_E$ et

$$\omega = \{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}.$$

Puisque seul ω contribue à l'intégrale (théorème A.77), la définition 3.1 des semi-normes de $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ et la majoration des semi-normes de l'intégrale du théorème 1.23 (a) donnent

$$\|\overline{f}\|_{\mathcal{D}'(\Omega;E);\varphi,\nu} = \|\langle \overline{f}, \varphi\rangle\|_{E;\nu} = \Big\| \int_\Omega f\varphi \Big\|_{E;\nu} = \Big\| \int_\omega f\varphi \Big\|_{E;\nu} \leq \int_\omega \|f\|_{E;\nu} |\varphi|.$$

La croissance de l'intégrale réelle (théorème A.76 (a)) et la définition 1.18 (a) des semi-normes de $\mathcal{C}(\Omega; E)$ (car $\overline{\omega}$ est compact) donnent donc, en notant $c_\varphi = \int_\Omega |\varphi|$,

$$\|\overline{f}\|_{\mathcal{D}'(\Omega;E);\varphi,\nu} \leq c_\varphi \sup_{x \in \overline{\omega}} \|f(x)\|_{E;\nu} = c_\varphi \|f\|_{\mathcal{C}(\Omega;E);\overline{\omega},\nu}.$$

D'après la caractérisation des applications linéaires continues du théorème 1.12 (a), ceci prouve que l'application $^-$ est continue de $\mathcal{C}(\Omega; E)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega; E)$.

***3º** Continuité séquentielle.* L'application $^-$ est séquentiellement continue, comme toute application continue (théorème 1.10). □

Il reste à démontrer le **lemme de Du Bois-Reymond**[4], à valeurs dans un espace de Neumann.

Théorème 3.7. — *Soit $f \in \mathcal{C}(\Omega; E)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et E est un espace de Neumann, telle que, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,*

$$\int_\Omega f\varphi = 0_E.$$

Alors,

$$f = 0. \;\blacksquare$$

Démonstration. Si f n'était pas nulle, il existerait $y \in \Omega$ tel que

$$f(y) \neq 0_E.$$

Puisque E est séparé (définition 1.1), comme tout espace de Neumann (définition 1.4), il existerait une semi-norme $\| \; \|_{E;\nu}$ de E telle que

$$\|f(y)\|_{E;\nu} = c > 0.$$

Puisque Ω est ouvert et f est continue, il existerait $r > 0$ tel que $|x - y| \leq r$ entraîne $x \in \Omega$ et

$$\|f(x) - f(y)\|_{E;\nu} \leq \frac{c}{2}.$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ à support dans la boule $B = \{x \in \mathbb{R}^d : |y - x| \leq r\}$, telle que

$$\varphi > 0 \text{ dans } \mathring{B}.$$

Ceci est par exemple réalisé par $\varphi(x) = \rho((x - y)/r)$, où la fonction ρ est définie par (2.4), p. 23. Alors (théorème A.76 (c)),

$$\int_\Omega \varphi = b > 0.$$

Puisque seul $\mathring{B}$ contribue ici à l'intégrale (théorème A.77), la majoration de ses semi-normes du théorème 1.23 (a), la croissance de l'intégrale réelle (théorème A.76 (a)) et sa linéarité (théorème A.74) donneraient successivement

$$\Big\| \int_\Omega (f - f(y))\,\varphi \Big\|_{E;\nu} = \Big\| \int_{\mathring{B}} (f - f(y))\,\varphi \Big\|_{E;\nu} \leq \int_{\mathring{B}} \|f - f(y)\|_{E;\nu}\, \varphi \leq \frac{c}{2} b$$

4. **Historique du lemme de Du Bois-Reymond.** Friedrich Ludwig STEGMANN énonça le théorème 3.7 pour une fonction réelle sur un intervalle en 1854 [87], avec une justification incorrecte. Des démonstrations correctes furent données par Eduard HEINE, en 1870 [42], puis par Paul DU BOIS-REYMOND, en 1879 [28]. Ce résutat est également appelé **lemme fondamental du calcul des variations**.

et
$$\Big\| \int_\Omega f(y)\,\varphi \Big\|_{E;\nu} = \Big\| f(y) \int_\Omega \varphi \Big\|_{E;\nu} = cb,$$
d'où
$$\Big\| \int_\Omega f\varphi \Big\|_{E;\nu} \geq \frac{cb}{2}.$$
Ceci contredirait l'hypothèse $\int_\Omega f\varphi = 0_E$, puisque E est séparé. Donc,
$$f = 0. \ \square$$

Dorénavant :
$$\begin{cases} \textit{\textbf{On identifie chaque fonction continue}}\ f \in \mathcal{C}(\Omega; E)\ \textit{\textbf{à la}} \\ \textit{\textbf{distribution}}\ \overline{f} \in \mathcal{D}'(\Omega; E)\ \textit{\textbf{définie au théorème 3.5.}} \end{cases} \tag{3.6}$$
Ceci est loisible puisque l'application $f \mapsto \overline{f}$ est injective d'après le théorème 3.6.

Montrons que, ainsi, l'espace des fonctions continues est topologiquement inclus dans celui des distributions.

Théorème 3.8. — *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et E un espace de Neumann. Alors,*
$$\mathcal{C}(\Omega; E) \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{D}'(\Omega; E)$$
et l'identité est continue, et donc séquentiellement continue, de $\mathcal{C}(\Omega; E)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega; E)$. ▮

Démonstration. Avec l'identification (3.6), l'application $f \mapsto \overline{f}$ construite au théorème 3.5 est devenue l'identité de $\mathcal{C}(\Omega; E)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega; E)$, donc les propriétés de continuité énoncées sont celles du théorème 3.6.

L'inclusion topologique résulte de la continuité de l'identité d'après le théorème 1.13. $\square$

On a maintenant les égalités suivantes.

Théorème 3.9. — *Pour toute $f \in \mathcal{C}(\Omega; E)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et E est un espace de Neumann, et toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,*
$$\langle f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega;E)\times\mathcal{D}(\Omega)} = \int_\Omega f\varphi$$
et, pour toute semi-norme $\|\ \|_{E;\nu}$ de E,
$$\|f\|_{\mathcal{D}'(\Omega;E);\varphi,\nu} = \Big\| \int_\Omega f\varphi \Big\|_{E;\nu}. \ ▮$$

Démonstration. ***1º*** *Première égalité.* Cette expression de $\langle f, \varphi\rangle$ est la réécriture de l'égalité du théorème 3.5 avec l'identification (3.6).

2º *Seconde égalité.* Cette expression de $\|f\|_{\mathcal{D}'(\Omega;E);\varphi,\nu}$ est la réécriture de la définition 3.1 des semi-normes de $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ avec l'expression ci-dessus de $\langle f, \varphi\rangle$. □

Compatibilité avec les opérations sur les fonctions. Pour généraliser aux distributions une opération relative aux fonctions (dérivation, support, restriction, etc.), il faut donc vérifier que la généralisation est compatible avec l'identification (3.6), c'est-à-dire **vérifier que l'on retrouve les opérations usuelles pour les fonctions**.

Rappelons qu'il convient d'être prudent avec les identifications, comme nous l'avons vu à la section *Identifications périlleuses* du volume 1 [80, § 14.6, p. 240–243]. □

Convergence des fonctions continues. La convergence uniforme sur les compacts de fonctions continues entraîne leur convergence au sens des distributions d'après le théorème 3.6. En revanche, leur convergence ponctuelle n'est ni plus forte ni moins forte que leur convergence au sens des distributions.

Par exemple, les fonctions sur $\mathbb{R}^d$ définies par

$$f_n(x) = n^d \rho(n^2 x),$$

où $\rho \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ est à support dans la boule $B(0,1)$ et $\int_{\mathbb{R}^d} \rho = 1$, convergent vers 0 dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ quand $n \to \infty$, car, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$,

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^d} f_n \varphi \Big| \leq c_\varphi \int_{\mathbb{R}^d} |f_n| = c n^{-d}.$$

Mais elles ne convergent pas ponctuellement si $\rho(0) \neq 0$, car $f_n(0) = n^d \rho(0)$.

Inversement, les fonctions définies par

$$g_n(x) = n^{2d} \rho(nx)$$

convergent ponctuellement vers 0 si $\rho(0) = 0$, car $g_n(x) = 0$ dès que $n \geq 1/|x|$ et $g_n(0) = 0$. Mais elles ne convergent pas dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, car, si $\varphi = 1$ dans $B(0,1)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} g_n \varphi = \int_{\mathbb{R}^d} g_n = n^d. \ \square$$

Identification des fonctions intégrables à des distributions. Les fonctions intégrables à valeurs dans un espace de Neumann n'étant pas définies, il n'est pas possible (pour l'instant) de les identifier à des distributions. Plutôt que les fonctions intégrables, nous définirons au volume 4 les *distributions intégrables*, qui équivalent aux *classes de fonctions intégrables presque partout égales* tout en étant plus agréables à manipuler et plus simples à définir. □

3.4. Le cas où E n'est pas un espace de Neumann

Si un espace semi-normé séparé E n'est pas un espace de Neumann, on peut quand même définir l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{D}(\Omega); E)$ des applications linéaires continues de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans E, mais **on ne doit pas** le noter $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ ni l'appeler « *espace de distributions* », car il n'a pas les propriétés attendues. En particulier, si, de plus, E est métrisable :

$$\begin{cases} \textit{On ne peut plus identifier toute fonction} \\ \textit{de } \mathcal{C}(\Omega; E) \textit{ à un élément de } \mathcal{L}(\mathcal{D}(\Omega); E). \end{cases}$$

D'abord, parce que l'intégrale à valeurs dans un tel espace E n'étant pas définie, la définition de $\overline{f}$ du théorème 3.5 n'a plus de sens. Ensuite, parce que, même si l'on étendait la définition 1.22 de l'intégrale à un tel espace E, l'égalité $\overline{f}(\varphi) = \int_\Omega f\varphi$ ne définirait pas toujours une application de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans E.

Pour pouvoir énoncer ceci de façon précise, rappelons que tout espace semi-normé séparé E possède [vol. 1, théorème 4.24, p. 81] un **complété séquentiel** $\widehat{E}$, c'est-à-dire dans un espace tel que :

$$\begin{cases} \widehat{E} \text{ est un espace de Neumann dans lequel } E \text{ est inclus et dense,} \\ \text{dont les semi-normes prolongent celles de } E \text{ et tel que :} \\ \widehat{E} \text{ est son seul sous-espace vectoriel séquentiellement fermé contenant } E. \end{cases} \tag{3.7}$$

(E a une infinité de complétés séquentiels, mais on peut passer de l'un à l'autre par une bijection séquentiellement continue ainsi que son inverse ; ils sont inclus dans les *complétés* classiques.)

Étendons maintenant la définition de l'intégrale à un espace semi-normé séparé E, non nécessairement séquentiellement complet :

$$\begin{cases} \text{Étant donné } f \in \mathcal{B}(\Omega; E), \displaystyle\int_\omega f \text{ est, par définition, la limite} \\ \text{dans } \widehat{E} \text{ des intégrales approchées } \mathbb{S}_\omega^n f \text{ de la définition 1.22.} \end{cases} \tag{3.8}$$

Cette définition est loisible, car $(\mathbb{S}_\omega^n f)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de E (la démonstration faite au volume 2 [81, lemme 4.10] n'utilise pas la complétion séquentielle de E). C'est donc également une suite de Cauchy de $\widehat{E}$, de sorte qu'elle y converge. **Cette construction ne nous paraît pas souhaitable**, puisque $\int_\Omega f$ n'appartient pas à E et puisque $\widehat{E}$ n'est pas unique. Nous ne l'utilisons qu'ici.

Étant donné maintenant $f \in \mathcal{C}(\Omega; E)$, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a $f\varphi \in \mathcal{B}(\Omega; E)$ et on définit $\overline{f}(\varphi) \in \widehat{E}$ par

$$\overline{f}(\varphi) \overset{\text{def}}{=} \int_\Omega f\varphi. \tag{3.9}$$

(Il arrive que $\overline{f}(\varphi)$ appartienne à E pour certains f et φ, mais ce n'est pas général.)

Nous sommes, enfin, en mesure de donner un énoncé précis, que voici.

Théorème 3.10. — *Si E est un espace semi-normé séparé métrisable non séquentiellement complet et Ω est un ouvert non vide de $\mathbb{R}^d$, l'application $f \mapsto \overline{f}$, définie par (3.8) et (3.9), n'est pas une application de $\mathcal{C}(\Omega; E)$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{D}(\Omega); E)$.*

En effet, il existe $f \in \mathcal{C}(\Omega; E)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telles que

$$\int_\Omega f\varphi \in \widehat{E} \setminus E. \blacksquare$$

Démonstration. ***1º*** *Réduction du problème.* Soit $B(z, r)$ une boule fermée incluse dans Ω. Il suffit de construire une fonction continue f, à support dans cette boule, telle que

$$\int_\Omega f \in \widehat{E} \setminus E. \tag{3.10}$$

En effet, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\varphi = 1$ dans $B(z, r)$, on aura alors

$$\int_\Omega f\varphi = \int_\Omega f \in \widehat{E} \setminus E,$$

et donc

$$\bar{f}(\varphi) \notin E.$$

2º *Construction de f.* Puisque E n'est pas séquentiellement complet, il possède une suite de Cauchy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui ne converge pas. Cette suite est également de Cauchy dans $\widehat{E}$ qui est séquentiellement complet, donc elle y a une limite u. Ainsi,

$$u_n \to u \text{ dans } \widehat{E}, \quad u \in \widehat{E} \setminus E. \tag{3.11}$$

Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de boules, $B_n = B(z_n, r_n)$, incluses dans $B(z, r)$, deux à deux disjointes, telles que

$$r_n > 0, \quad r_n \to 0, \quad z_n \to z.$$

Puisque E est métrisable, il peut [volume 1, théorème 4.4] être muni d'une suite croissante de semi-normes, disons $(\| \, \|_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Soit $(\||\, \||_m)_{m\in\mathbb{N}}$ les semi-normes de $\widehat{E}$ prolongeant celles de E.

Quitte à choisir une sous-suite des u_n, on peut supposer que, pour $n \geq 1$,

$$\|u_n - u_{n-1}\|_n \leq \frac{1}{n}|r_n|^d. \tag{3.12}$$

En effet, il suffit de considérer une sous-suite $(u_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour chaque n,

$$\||u_{\sigma(n)} - u\||_n \leq \frac{1}{2}\inf\Big\{\frac{1}{n}|r_n|^d, \frac{1}{n+1}|r_{n+1}|^d\Big\}.$$

Soit enfin $\phi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$\operatorname{supp}\phi \subset \{x \in \mathbb{R}^d : |x| < 1\} \text{ et } \int_{\mathbb{R}^d} \phi = 1.$$

On définit f dans tout Ω par

$$f(x) = \begin{cases} |r_0|^{-d}\,\phi((x-z_0)/r_0)\,u_0 & \text{si } x \in B_0, \\ |r_n|^{-d}\,\phi((x-z_n)/r_n)(u_n - u_{n-1}) & \text{si } x \in B_n,\, n \geq 1, \\ 0_E & \text{si } x \notin \bigcup_{n\geq 0} B_n. \end{cases} \tag{3.13}$$

Cette fonction est continue en dehors du point z. Elle l'est également en z, car, d'après (3.12) et (3.13),

$$\sup_{x\in B_n} \|f(x)\|_n \leq \frac{1}{n} \sup_{y\in\mathbb{R}^d} |\phi(y)|.$$

Ainsi, f est continue dans tout Ω. Et son support est compact et inclus dans Ω.

3º Vérification de (3.10). Notons $\widehat{f}$ la même fonction dont les valeurs $\widehat{f}(x) = f(x)$ sont considérées comme des éléments de $\widehat{E}$. Celui-ci est un espace de Neumann d'après (3.7), ce qui permet d'utiliser les propriétés de l'intégrale à valeurs dans un tel espace.

D'abord, d'après l'effet d'une homothétie sur l'intégrale (théorème A.88),

$$\int_{\mathring{B}_0} \widehat{f} = u_0, \quad \int_{\mathring{B}_n} \widehat{f} = u_n - u_{n-1}.$$

Ensuite, en notant $\omega_n = \bigcup_{0\leq i\leq n} B_i$, l'additivité de l'intégrale par rapport aux ouverts disjoints [vol. 1, théorème 4.21] donne

$$\int_{\omega_n} \widehat{f} = \sum_{0\leq i\leq n} \int_{\mathring{B}_i} \widehat{f} = u_n. \tag{3.14}$$

Et, en notant $\omega = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathring{B}_i$, la continuité de l'intégrale par rapport aux ouverts croissants [vol. 1, théorème 4.19] donne, quand $n \to \infty$,

$$\int_{\omega_n} \widehat{f} \to \int_{\omega} \widehat{f}.$$

D'où, avec (3.11) et (3.14),

$$\int_{\omega} \widehat{f} = u.$$

Enfin, toujours pour les valeurs dans un espace de Neumann, le domaine où la fonction est nulle ne contribuant pas à l'intégrale (théorème A.77), on peut remplacer ici ω par Ω.

La généralisation (3.8) de l'intégrale à un espace E non séquentiellement complet donne alors

$$\int_{\Omega} f = \int_{\Omega} \widehat{f} = u.$$

L'intégrale de f n'appartient donc pas à E, puisque u n'y appartient pas d'après (3.11), ce qui prouve (3.10), et donc le théorème. □

Le cas où E n'est ni séquentiellement complet ni métrisable. Si l'espace E n'est pas métrisable, nous ne savons plus montrer que, s'il n'est pas séquentiellement complet, $f \mapsto \overline{f}$ n'est pas une application de $\mathcal{C}(\Omega; E)$ dans $\mathcal{L}(\mathcal{D}(\Omega); E)$.

Mais nous savons encore montrer que $\mathcal{L}(\mathcal{D}(\Omega); E)$ n'a pas les propriétés attendues d'un espace de distributions. Plus précisément, il est souhaitable que les distributions généralisent aussi certaines fonctions singulières, par exemple la valeur principale, dont les définitions font intervenir la partie finie d'intégrales. Or, l'hypothèse minimale pour que la partie finie soit un élément de E dès qu'elle existe est que E soit de Neumann, qu'il soit métrisable ou non [SIMON, 84, à paraître]. □

Pour travailler au sens des distributions sur une fonction à valeurs dans un espace semi-normé séparé E qui n'est pas de Neumann, **il suffit** de plonger E dans son complété séquentiel $\widehat{E}$ défini par (3.7), p. 54. Par exemple, si

$$f \in \mathcal{C}(\Omega; E),$$

elle appartient également à $\mathcal{C}(\Omega; \widehat{E})$, donc elle est identifiable à une distribution de $\mathcal{D}'(\Omega; \widehat{E})$, puisque $\widehat{E}$ est un espace de Neumann. Ce qui permet, entre autres, de la dériver et de définir ses dérivées partielles

$$\partial^\beta f \in \mathcal{D}'(\Omega; \widehat{E}).$$

3.5. Mesures

Définissons d'abord l'espace $\mathcal{K}(\Omega)$[5], qui sert à construire l'espace des mesures.

Définition 3.11. — *On note $\mathcal{K}(\Omega)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, l'espace vectoriel des fonctions réelles continues dans Ω à support compact muni des semi-normes, indexées par $p \in \mathcal{C}^+(\Omega)$,*

$$\|f\|_{\mathcal{K}(\Omega);p} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{x \in \Omega} p(x)|f(x)|. \ ▮$$

Notation $\mathcal{K}(\Omega)$. C'est la notation utilisée par BOURBAKI [9, chap. III, § 1, no 1, p. 40]. □

Intérêt des semi-normes de $\mathcal{K}(\Omega)$. Les semi-normes de la définition 3.11 fournissent les propriétés habituellement obtenues en recourant à la délicate **topologie de limite inductive des $\mathcal{C}_K(\Omega)$**. En particulier, toutes les fonctions d'un borné de $\mathcal{K}(\Omega)$ ont leur support dans un même compact K inclus dans Ω d'après le théorème 2.4. Ces semi-normes engendrent ladite topologie de limite inductive [SIMON, 84, à paraître], tout en étant plus simples à utiliser. □

Définissons maintenant l'espace des mesures.

---

5. **Historique des semi-normes de $\mathcal{K}(\Omega)$.** BOURBAKI munit $\mathcal{K}(\Omega)$ [9, chap. III, § 1, no 1, p. 41] de la topologie de limite inductive des $\mathcal{C}_K(\Omega)$. Les semi-normes de la définition 3.11 nous semblent nouvelles.

Définition 3.12. — *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et E un espace de Neumann, dont la famille de semi-normes est notée $\{\| \; \|_{E;\nu} : \nu \in \mathcal{N}_E\}$.*

*On appelle **mesure**[6] sur Ω à valeurs dans E, toute application linéaire continue de $\mathcal{K}(\Omega)$ dans E.*

On note $\mathcal{M}(\Omega; E)$ l'espace de ces mesures muni des semi-normes, indexées par $\varphi \in \mathcal{K}(\Omega)$ et $\nu \in \mathcal{N}_E$,

$$\|f\|_{\mathcal{M}(\Omega;E);\varphi,\nu} \stackrel{\text{def}}{=} \|\langle f, \varphi\rangle\|_{E;\nu}. \;\blacksquare$$

On note $\langle f, \varphi\rangle$ la valeur $f(\varphi)$ d'une mesure f appliquée à φ, et

$$\mathcal{M}(\Omega) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}).$$

Le cas où E n'est pas un espace de Neumann. Si E est un espace semi-normé séparé qui n'est pas séquentiellement complet, on peut quand même définir l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{K}(\Omega); E)$ des applications linéaires continues de $\mathcal{K}(\Omega)$ dans E, mais **on ne doit pas** l'appeler «espace des mesures», ni le noter $\mathcal{M}(\Omega; E)$, car il n'a pas les propriétés attendues.

En particulier, on ne peut pas identifier toute fonction continue à un élément de $\mathcal{L}(\mathcal{K}(\Omega); E)$ lorsque, de plus, E est métrisable, puisqu'on ne peut même pas l'identifier à un élément de $\mathcal{L}(\mathcal{D}(\Omega); E)$ d'après le théorème 3.10. ☐

Terminologie. Les mesures données par la définition 3.12 sont parfois appelées **mesures de Radon**, par exemple dans [EDWARDS, 30, § 4.3, p. 177], bien que Johann RADON les ait définies comme *fonctions complètement additives d'ensembles* [61]. Quant à nous, nous suivons la terminologie de Nicolas BOURBAKI [9, chap. III, § 1, no 3, p. 47]. ☐

Topologie vague. La topologie engendrée par les semi-normes de la définition 3.12, c'est-à-dire la topologie de la convergence simple dans $\mathcal{K}(\Omega)$, est dite **topologie vague** de $\mathcal{M}(\Omega; E)$. ☐

Mesure de Lebesgue. L'application $\varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} \varphi$ définit une mesure réelle, dite **mesure de Lebesgue**, sur $\mathbb{R}^d$, puisque, d'après l'inégalité (3.5), p. 49, relative à $f \equiv 1$, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$,

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^d} \varphi \Big| \leq 2^{d+1} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} p(x)|\varphi(x)| = 2^{d+1} \|\varphi\|_{\mathcal{K}(\mathbb{R}^d);p},$$

où p est donnée par (3.4), c'est-à-dire ici $p(x) = (2 + |x|)^{d+2}$.

Henri LEBESGUE l'a définie, dans sa thèse [49], comme une *fonction additive d'ensembles*, qui dans le cas particulier d'un ensemble ouvert ω coïncide avec sa mesure $|\omega|$ construite à la définition A.83. ☐

Caractérisons les mesures.

---

6. **Historique des mesures**. La définition des mesures comme *applications linéaires sur* $\mathcal{K}(\Omega)$ nous semble due à Nicolas BOURBAKI, en 1965 [9, chap. III, § 1, no 3, p. 47].
Antérieurement, les mesures étaient introduites comme *fonctions additives d'ensembles*, à la suite des travaux d'Emile BOREL, en 1894 [7], Henri LEBESGUE, en 1902 [49], et Johann RADON, en 1913 [61]. Leur genèse est détaillée dans les *Éléments d'histoire des mathématiques* de Nicolas BOURBAKI [12, p. 278–287].

Théorème 3.13. — *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et E un espace de Neumann. Alors,*

$$f \in \mathcal{M}(\Omega; E)$$

si et seulement si : f est une application linéaire de $\mathcal{K}(\Omega)$ dans E et, pour toute semi-norme $\| \ \|_{E;\nu}$ de E, il existe $p \in \mathcal{C}^+(\Omega)$ et $c \in \mathbb{R}$ tels que, pour toute $\varphi \in \mathcal{K}(\Omega)$,

$$\|\langle f, \varphi \rangle\|_{E;\nu} \leq c\,\|\varphi\|_{\mathcal{K}(\Omega);p}.$$

C'est-à-dire,

$$\|\langle f, \varphi \rangle\|_{E;\nu} \leq c \sup_{x \in \Omega} p(x)|\varphi(x)|. \ \blacksquare$$

Démonstration. Une mesure étant, par définition 3.12, une application linéaire continue de $\mathcal{K}(\Omega)$ dans E, ceci résulte de la caractérisation des applications linéaires continues du théorème 1.12 (b), car la famille de semi-normes de $\mathcal{K}(\Omega)$ est filtrante.

En effet, cette famille, qui est donnée par la définition 3.11, satisfait la définition 1.8 d'une famille filtrante, car, étant donné des fonctions $p_1, \ldots, p_n$ de $\mathcal{C}^+(\Omega)$, leur somme $p = p_1 + \cdots + p_n$ appartient à $\mathcal{C}^+(\Omega)$ et majore les p_i, et donc,

$$\sup_{1 \leq i \leq n} \|\varphi\|_{\mathcal{K}(\Omega);p_i} = \sup_{1 \leq i \leq n} \sup_{x \in \Omega} p_i(x)|\varphi(x)| \leq \sup_{x \in \Omega} p(x)|\varphi(x)| = \|\varphi\|_{\mathcal{K}(\Omega);p}. \ \square$$

Définissons la **masse de Dirac**[7] δ_x, qui est une mesure réelle fort utile, en particulier parce que δ_0 est l'élément neutre de la pondération (théorème 7.19).

Définition 3.14. — *Étant donné $x \in \mathbb{R}^d$, on définit $\delta_x \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ par : pour toute $\varphi \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$,*

$$\langle \delta_x, \varphi \rangle \overset{\text{def}}{=} \varphi(x). \ \blacksquare$$

Justification. L'application δ_x est bien une mesure, car elle est linéaire et continue de $\mathcal{K}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$, puisque, en notant 1_Ω la fonction constante de valeur 1 dans Ω,

$$|\langle \delta_x, \varphi \rangle| = |\varphi(x)| \leq \sup_{z \in \Omega} |\varphi(z)| = \|\varphi\|_{\mathcal{K}(\Omega);1_\Omega}. \ \square$$

---

7. **Historique de la masse de Dirac**. Paul DIRAC introduisit la masse qui porte aujourd'hui son nom en 1926 [26, p. 625], dans les termes suivants :

> « la fonction [...] définie par $\delta(x) = 0$ si $x \neq 0$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = 1$. Au point de vue de la rigueur, naturellement, $\delta(x)$ n'est pas une vraie fonction de x. [...] Malgré tout, on peut utiliser $\delta(x)$ comme si c'était une vraie fonction pour presque tout ce qui concerne la mécanique quantique sans obtenir de résultats inexacts. »

Associons une distribution à chaque mesure.

Théorème 3.15. — *Soit $f \in \mathcal{M}(\Omega; E)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et E est un espace de Neumann.*

On définit $\overline{f} \in \mathcal{D}'(\Omega; E)$ par : pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\langle \overline{f}, \varphi \rangle \overset{\text{def}}{=} \langle f, \varphi \rangle.$$

Autrement dit, $\overline{f}$ est la restriction de f à $\mathcal{D}(\Omega)$. ▮

Démonstration. D'après la caractéristation des mesures du théorème 3.13 et la définition 3.11 des semi-normes de $\mathcal{K}(\Omega)$, pour toute semi-norme $\| \ \|_{E;\nu}$ de E, il existe $p \in \mathcal{C}^+(\Omega)$ et $c \in \mathbb{R}$ tels que, pour toute $\varphi \in \mathcal{K}(\Omega)$,

$$\|\langle f, \varphi \rangle\|_{E;\nu} \leq c\|\varphi\|_{\mathcal{K}(\Omega);p} = c \sup_{x \in \Omega} p(x)|\varphi(x)|.$$

Quand $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, il vient, avec la définition 2.5 des semi-normes de $\mathcal{D}(\Omega)$,

$$\|\langle \overline{f}, \varphi \rangle\|_{E;\nu} = \|\langle f, \varphi \rangle\|_{E;\nu} \leq c \sup_{x \in \Omega} \sup_{0 \leq |\beta| \leq p(x)} p(x)|\partial^\beta \varphi(x)| = c\|\varphi\|_{\mathcal{D}(\Omega);p}.$$

Donc, d'après la caractérisation des distributions du théorème 3.3,

$$\overline{f} \in \mathcal{D}'(\Omega; E). \ \square$$

Montrons que deux mesures distinctes fournissent des distributions distinctes, ce qui permettra d'identifier chaque mesure à une distribution.

Théorème 3.16. — *L'application $f \mapsto \overline{f}$ donnée par le théorème 3.15 est linéaire, continue et injective de $\mathcal{M}(\Omega; E)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega; E)$.* ▮

La démonstration utilise la propriété de densité suivante, qui est établie au volume 2 [81, théorème 7.16, puisque $\mathcal{K}^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)$].

Théorème 3.17. — *L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, est séquentiellement dense dans $\mathcal{K}(\Omega)$.* ▮

Démonstration du théorème 3.16. **1º** ***Injectivité.*** Soit $f \in \mathcal{M}(\Omega; E)$ telle que

$$f \neq 0.$$

C'est-à-dire, il existe $\varphi \in \mathcal{K}(\Omega)$ telle que

$$\langle f, \varphi \rangle \neq 0_E.$$

D'après le théorème 3.17, il existe une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ qui converge vers φ dans $\mathcal{K}(\Omega)$. Les $\langle f, \varphi_n \rangle$ ne peuvent pas être toutes nulles, sinon leur limite $\langle f, \varphi \rangle$ le serait aussi. Donc, pour un des n,

$$\langle \overline{f}, \varphi_n \rangle = \langle f, \varphi_n \rangle \neq 0_E.$$

D'où,

$$\overline{f} \neq 0.$$

L'application $f \mapsto \overline{f}$, étant linéaire, est donc injective.

2º ***Continuité.*** Notons $\{\| \ \|_{E;\nu} : \nu \in \mathcal{N}_E\}$ la famille de semi-normes de E. Les définitions 3.1 et 3.12 des semi-normes de $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ et $\mathcal{M}(\Omega; E)$ donnent, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et tout $\nu \in \mathcal{N}_E$,

$$\|\overline{f}\|_{\mathcal{D}'(\Omega;E);\varphi,\nu} = \|\langle \overline{f}, \varphi \rangle\|_{E;\nu} = \|\langle f, \varphi \rangle\|_{E;\nu} = \|f\|_{\mathcal{M}(\Omega;E);\varphi,\nu}.$$

D'après la caractérisation des applications linéaires continues du théorème 1.12 (a), ceci montre que l'application $f \mapsto \overline{f}$ est continue. $\square$

Dorénavant, grâce à l'injectivité de l'application $f \mapsto \overline{f}$ établie au théorème 3.16 :

$$\begin{cases} \textbf{\textit{On identifie chaque mesure }} f \in \mathcal{M}(\Omega; E) \textbf{\textit{ à la distribution}} \\ \overline{f} \in \mathcal{D}'(\Omega; E) \textbf{\textit{ définie, pour toute }} \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\textbf{\textit{, par}} \\ \qquad\qquad \langle \overline{f}, \varphi \rangle \overset{\text{def}}{=} \langle f, \varphi \rangle. \end{cases} \tag{3.15}$$

Montrons que, ainsi, l'espace des mesures est topologiquement inclus dans celui des distributions.

Théorème 3.18. — *Pour tout un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ et tout espace de Neumann E,*

$$\mathcal{M}(\Omega; E) \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{D}'(\Omega; E). \ \blacksquare$$

Démonstration. Avec l'identification (3.15), l'application $f \mapsto \overline{f}$ construite au théorème 3.15 est devenue l'identité de $\mathcal{M}(\Omega; E)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega; E)$. Le théorème 3.16 donne donc la continuité de cette identité. Ce qui équivaut, d'après le théorème 1.13, à l'inclusion topologique énoncée. $\square$

Propriétés des mesures. L'identification (3.15) permet d'étendre aux mesures toutes les propriétés des distributions, et en particulier de définir leurs dérivées (§ 5.2), leur support (§ 6.6), leur pondération (chapitre 7), la séparation ou le regroupement de leurs variables (§ 15.4 et 15.6), et d'obtenir des propriétés et des conditions d'existence de leurs primitives (chapitres 12 et 13).

Certaines de ces propriétés des distributions peuvent être améliorées dans le cas de mesures, puisque ce sont des distributions particulières. En particulier, les mesures sont localement des dérivées de fonctions continues, sans qu'il soit nécessaire de supposer E normé (comme aux théorèmes 16.6 et 16.8), car elles sont *localement d'ordre* 0 (définition 16.1 (b)). $\square$

Caractérisons les distributions qui sont des mesures.

Théorème 3.19. — *Une distribution $f \in \mathcal{D}'(\Omega; E)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et E est un espace de Neumann, est une mesure de $\mathcal{M}(\Omega; E)$ si, et seulement si, pour toute semi-norme $\| \ \|_{E;\nu}$ de E, il existe $p \in \mathcal{C}^+(\Omega)$ et $c \in \mathbb{R}$ tels que, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,*

$$\|\langle f, \varphi\rangle\|_{E;\nu} \leq c \sup_{x\in\Omega} p(x)|\varphi(x)|. \tag{3.16}$$

∎

Démonstration. ***1º*** *Suffisance de (3.16).* Supposons que $f \in \mathcal{D}'(\Omega; E)$ vérifie (3.16). Sa linéarité et la définition 3.11 des semi-normes de $\mathcal{K}(\Omega)$ donnent, pour φ_1 et φ_2 dans $\mathcal{D}(\Omega)$,

$$\|\langle f, \varphi_1 - \varphi_2\rangle\|_{E;\nu} \leq c \sup_{x\in\Omega} p(x)|(\varphi_1 - \varphi_2)(x)| = c\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{\mathcal{K}(\Omega);p}.$$

Donc, f est uniformément continue (définition 1.9 (b)) du sous-ensemble $\mathcal{D}(\Omega)$ de $\mathcal{K}(\Omega)$ dans E. Puisque E est un espace de Neumann et $\mathcal{D}(\Omega)$ est séquentiellement dense dans $\mathcal{K}(\Omega)$ (théorème 3.17), le théorème de prolongement continu (théorème A.34) montre qu'il existe une unique application g, continue de $\mathcal{K}(\Omega)$ dans E, qui prolonge f. C'est-à-dire, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\langle f, \varphi\rangle = \langle g, \varphi\rangle.$$

La linéarité de f entraîne, par continuité, celle de g, donc

$$g \in \mathcal{M}(\Omega; E).$$

Ainsi, f est la distribution $\overline{g}$ identifiée à la mesure g par (3.15).

2º Nécessité de (3.16). Supposons que $f \in \mathcal{D}'(\Omega; E)$ soit une mesure. C'est-à-dire qu'elle est identifiée, avec (3.15), à une mesure

$$\underline{f} \in \mathcal{M}(\Omega; E).$$

D'après la caractérisation des mesures du théorème 3.13, pour toute semi-norme $\| \ \|_{E;\nu}$ de E, il existe $p \in \mathcal{C}^+(\Omega)$ et $c \in \mathbb{R}$ tels que, pour toute $\varphi \in \mathcal{K}(\Omega)$,

$$\|\langle \underline{f}, \varphi \rangle\|_{E;\nu} \leq c \sup_{x \in \Omega} p(x)|\varphi(x)|.$$

Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, ceci donne

$$\|\langle f, \varphi \rangle\|_{E;\nu} = \|\langle \underline{f}, \varphi \rangle\|_{E;\nu} \leq c \sup_{x \in \Omega} p(x)|\varphi(x)|. \ \square$$

3.6. Fonctions continues et mesures

Associons une mesure à chaque fonction continue.

Théorème 3.20. — *Soit $f \in \mathcal{C}(\Omega; E)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et E un espace de Neumann, dont la famille de semi-normes est notée $\{\| \ \|_{E;\nu} : \nu \in \mathcal{N}_E\}$.*

On définit $\hat{f} \in \mathcal{M}(\Omega; E)$ par : pour toute $\varphi \in \mathcal{K}(\Omega)$,

$$\langle \hat{f}, \varphi \rangle \overset{\text{def}}{=} \int_\Omega f\varphi.$$

Pour toute $\varphi \in \mathcal{K}(\Omega)$ et tout $\nu \in \mathcal{N}_E$,

$$\|\hat{f}\|_{\mathcal{M}(\Omega;E);\varphi,\nu} \leq c\|f\|_{\mathcal{C}(\Omega;E);K,\nu},$$

où K est le support de φ et $c = \int_\Omega |\varphi|$. ▮

Démonstration. *1º Sens de l'intégrale.* L'intégrale de $f\varphi$ a un sens, d'après la définition 1.22 de l'intégrale à valeurs dans un espace de Neumann, car $f\varphi$ est uniformément continue à support borné, c'est-à-dire qu'elle appartient à $\mathcal{B}(\Omega; E)$ (définition 1.21).

Ceci résulte, d'après un corollaire (théorème A.33) du théorème de Heine, de ce que $f\varphi$ est continue (comme tout produit de fonction continue) à support est compact (d'après le théorème 2.2 (a), puisqu'elle est nulle hors du support de φ, qui est un compact inclus dans Ω).

2º Obtention d'une mesure. Montrons que $\hat{f}$ satisfait la caractérisation des mesures du théorème 3.13. Étant donné $\nu \in \mathcal{N}_E$, on définit $p \in \mathcal{C}^+(\Omega)$ par

$$p(x) = (2 + |x|)^{d+2} \|f(x)\|_{E;\nu}.$$

Soit $\varphi \in \mathcal{K}(\Omega)$ et $\omega = \Omega \cap B$, où B est n'importe quelle boule ouverte contenant le support de φ. Seul ω contribue à l'intégrale de $f\varphi$ d'après le théorème A.77, donc la majoration des semi-normes de l'intégrale du théorème 1.23 (a) donne

$$\Big\| \int_\Omega f\varphi \Big\|_{E;\nu} = \Big\| \int_\omega f\varphi \Big\|_{E;\nu} \le \int_\omega \|f\|_{E;\nu} |\varphi| = \int_\omega \frac{p(x)|\varphi(x)|}{(2 + |x|)^{d+2}} \, \mathrm{d}x.$$

Puisque $\int_\omega 1/(2+|x|)^{d+2} \, \mathrm{d}x \le 2^{d+1}$ (lemme A.82), la croissance de l'intégrale réelle (théorème A.76 (a)) et sa linéarité donnent

$$\Big\| \int_\Omega f\varphi \Big\|_{E;\nu} \le 2^{d+1} \sup_{x \in \Omega} p(x)|\varphi(x)|.$$

C'est-à-dire, avec la définition 3.12 des semi-normes de $\mathcal{K}(\Omega)$,

$$\|\langle \hat{f}, \varphi \rangle\|_{E;\nu} \le 2^{d+1} \|\varphi\|_{\mathcal{K}(\Omega);p}.$$

L'application $\hat{f}$ étant linéaire, puisque l'intégrale est linéaire (théorème A.74), cette inégalité entraîne, d'après la caractérisation des mesures du théorème 3.13, que

$$\hat{f} \in \mathcal{M}(\Omega; E).$$

3º Majoration des semi-normes de $\hat{f}$. En notant K le support de φ, on a, pour tout $y \in \Omega$,

$$\|f(y)\|_{E;\nu} |\varphi| \le \sup_{x \in K} \|f(x)\|_{E;\nu} |\varphi|.$$

Les majorations des théorèmes 1.23 (a) et A.76 (a), à nouveau, donnent donc

$$\Big\| \int_\Omega f\varphi \Big\|_{E;\nu} \le \int_\Omega \|f\|_{E;\nu} |\varphi| \le \sup_{x \in K} \|f(x)\|_{E;\nu} \int_\Omega |\varphi|.$$

D'où, en notant $c = \int_\Omega |\varphi|$,

$$\|\langle \hat{f}, \varphi \rangle\|_{E;\nu} = \Big\| \int_\Omega f\varphi \Big\|_{E;\nu} \le c \sup_{x \in K} \|f(x)\|_{E;\nu}.$$

C'est-à-dire, d'après les définitions 3.12 et 1.18 (a) des semi-normes de $\mathcal{M}(\Omega; E)$ et $\mathcal{C}(\Omega; E)$,

$$\|\hat{f}\|_{\mathcal{M}(\Omega;E);\varphi,\nu} \le c \|f\|_{\mathcal{C}(\Omega;E);K,\nu}. \ \square$$

Comparons les espaces de fonctions continues, de mesures, et de distributions.

Théorème 3.21. — *Pour tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ et tout espace de Neumann E,*

$$\mathcal{C}(\Omega; E) \underset{\to}{\subseteq} \mathcal{M}(\Omega; E) \underset{\to}{\subseteq} \mathcal{D}'(\Omega; E). \quad \blacksquare$$

Démonstration. ***1º*** *Inclusion de $\mathcal{C}(\Omega; E)$ dans $\mathcal{M}(\Omega; E)$.* Soit $f \in \mathcal{C}(\Omega; E)$, et soit $\hat{f} \in \mathcal{M}(\Omega; E)$ la mesure donnée par le théorème 3.20. Les distributions $\overline{f}$ et $\overline{\hat{f}}$ auxquelles elles sont identifiées, respectivement par (3.6) et (3.15), coïncident, car les deux valent $\int_\Omega f\varphi$ pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Puisque $\overline{\hat{f}} \in \mathcal{M}(\Omega; E)$, ceci prouve que

$$\mathcal{C}(\Omega; E) \subset \mathcal{M}(\Omega; E).$$

L'inégalité du théorème 3.20 montre, d'après la caractérisation des applications linéaires continues du théorème 1.12 (a), que l'identité est continue de $\mathcal{C}(\Omega; E)$ dans $\mathcal{M}(\Omega; E)$. Ce qui, d'après le théorème 1.13, équivaut à l'inclusion topologique

$$\mathcal{C}(\Omega; E) \underset{\to}{\subseteq} \mathcal{M}(\Omega; E).$$

2º *Inclusion de $\mathcal{M}(\Omega; E)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega; E)$.* Elle a été établie au théorème 3.18. $\square$

Chapitre 4

Extraction de sous-suites convergentes

Ce chapitre est consacré à l'extraction de sous-suites convergentes de $\mathcal{D}'(\Omega; E)$, ce qui est un outil important pour la résolution des edp par la *méthode de compacité* que nous utiliserons au volume 6.

Nous commençons par caractériser les ensembles bornés de $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ (§ 4.1) et ses suites convergentes (§ 4.2), puis ses ensembles relativement séquentiellement compacts, c'est-à-dire dont toute suite a une sous-suite convergente (théorème 4.6).

Nous en déduisons que :
— $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ est un espace de Neumann, c'est-à-dire que ses suites de Cauchy convergent (théorème 4.5).
— Si toute suite bornée de E a une sous-suite convergente dans un espace de Neumann F, toute suite bornée de $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ a une sous-suite convergente dans $\mathcal{D}'(\Omega; F)$ (théorème 4.10) ; en particulier, toute suite bornée de $\mathcal{D}'(\Omega)$ a une sous-suite convergente (théorème 4.7).
— Si toute suite bornée de E a une sous-suite convergente dans E-faible, celui-ci est de Neumann et toute suite bornée de $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ a une sous-suite convergente dans $\mathcal{D}'(\Omega; E\text{-faible})$ (théorème 4.15).

4.1. Bornés de $\mathcal{D}'(\Omega; E)$

Caractérisons les **ensembles bornés de distributions**, ce qui va servir puisque toute suite convergente ou de Cauchy est bornée.

Théorème 4.1. — *Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}'(\Omega; E)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et E est un espace de Neumann.*

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) *$\mathcal{F}$ est borné dans $\mathcal{D}'(\Omega; E)$.*

(b) *Pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et toute semi-norme $\| \ \|_{E;\nu}$ de E,*

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \|\langle f, \varphi \rangle\|_{E;\nu} < \infty.$$

(c) *Pour toute* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\{\langle f, \varphi\rangle : f \in \mathcal{F}\} \text{ est borné dans } E. \blacksquare$$

Démonstration. Par définition 1.2 d'un borné d'un espace semi-normé et 3.1 des semi-normes de $\mathcal{D}'(\Omega; E)$, $\mathcal{F}$ est borné dans $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ équivaut à : pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et tout $\nu \in \mathcal{N}_E$,

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \|f\|_{\mathcal{D}'(\Omega;E);\varphi,\nu} = \sup_{f \in \mathcal{F}} \|\langle f, \varphi\rangle\|_{E;\nu} < \infty.$$

C'est-à-dire, à nouveau d'après la définition 1.2, $\{\langle f, \varphi\rangle : f \in \mathcal{F}\}$ est borné dans E. □

Montrons que les bornés de $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ sont équicontinus[1] sur $\mathcal{D}(\Omega)$ et sur les $\mathcal{C}^\infty_K(\Omega)$.

Théorème 4.2. — *Soit*

$$\mathcal{F} \text{ un borné de } \mathcal{D}'(\Omega; E),$$

où Ω *est un ouvert de* $\mathbb{R}^d$ *et* E *est un espace de Neumann, et soit* $\| \; \|_{E;\nu}$ *une semi-norme de* E. *Alors :*

(a) *Pour tout compact* $K \subset \Omega$, *il existe* $m_K \in \mathbb{N}$ *et* $c_K \in \mathbb{R}$ *tels que, pour toute* $f \in \mathcal{F}$ *et toute* $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_K(\Omega)$,

$$\|\langle f, \varphi\rangle\|_{E;\nu} \le c_K \|\varphi\|_{\mathcal{C}^{m_K}_{\mathrm{b}}(\Omega)}.$$

(b) *Il existe* $p \in \mathcal{C}^+(\Omega)$ *telle que, pour toute* $f \in \mathcal{F}$ *et toute* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\|\langle f, \varphi\rangle\|_{E;\nu} \le \|\varphi\|_{\mathcal{D}(\Omega);p}. \blacksquare$$

Démonstration. **1º** Propriété (a). Soit K un compact inclus dans Ω. Montrons que $\mathcal{F}$ satisfait les hypothèses du théorème de Banach–Steinhaus (théorème A.39) relatif à $F = \mathcal{C}^\infty_K(\Omega)$.

— L'espace $\mathcal{C}^\infty_K(\Omega)$ est un espace de Fréchet (théorème A.53).

— Toute distribution $f \in \mathcal{F}$ est continue de $\mathcal{C}^\infty_K(\Omega)$ dans E (théorème 3.4 (d)).

1. **Historique de l'équicontinuité des bornés du théorème 4.2 (b).** Laurent SCHWARTZ démontra en 1950 [68, chap. 3, § 3, b) et a), p. 72] que les bornés de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, c'est-à-dire pour la topologie simple utilisée ici, coïncident avec les bornés de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$-unif, c'est-à-dire pour la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ qu'il utilise, et que ces derniers sont équicontinus.

— D'après la caractérisation des bornés de $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ du théorème 4.1 (b), pour toute $\varphi \in \mathcal{C}_K^\infty(\Omega)$ et toute semi-norme $\| \ \|_{E;\nu}$ de E,

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \|\langle f, \varphi \rangle\|_{E;\nu} < \infty.$$

Le théorème A.39 montre alors qu'il existe $c_K \in \mathbb{R}$ et un nombre fini I de semi-normes de $\mathcal{C}_K^\infty(\Omega)$, c'est-à-dire (par définition 2.3 (a)) de semi-normes de $\mathcal{C}_{\mathrm{b}}^\infty(\Omega)$ indexées par des $m_i \in \mathbb{N}$, telles que, pour toutes les fonctions $f \in \mathcal{F}$ et $\varphi \in \mathcal{C}_K^\infty(\Omega)$,

$$\|\langle f, \varphi \rangle\|_{E;\nu} \le c_K \sup_{1 \le i \le I} \|\varphi\|_{\mathcal{C}_{\mathrm{b}}^\infty(\Omega); m_i}.$$

D'où la majoration énoncée avec $m_K = \sup_{1 \le i \le I} m_i$ puisque, d'après les définitions 1.19 (b) et 1.18 (b),

$$\|\varphi\|_{\mathcal{C}_{\mathrm{b}}^\infty(\Omega); m_i} = \|\varphi\|_{\mathcal{C}_{\mathrm{b}}^{m_i}(\Omega)} \le \|\varphi\|_{\mathcal{C}_{\mathrm{b}}^{m_K}(\Omega)}.$$

2º Propriété (b). La majoration de (a) entraîne celle de (b) d'après le second théorème de contrôle de normes des $\mathcal{C}_K^m(\Omega)$, c'est-à-dire le théorème 2.25, relatif à la semi-norme π sur $\mathcal{D}(\Omega)$ définie par $\pi(\varphi) = \|\langle f, \varphi \rangle\|_{E;\nu}$. □

4.2. Convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega; E)$

Caractérisons les **suites convergentes de distributions**.

Théorème 4.3. — *Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ et $f \in \mathcal{D}'(\Omega; E)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et E est un espace de Neumann.*

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) $$f_n \to f \textit{ dans } \mathcal{D}'(\Omega; E).$$

(b) *Pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et toute semi-norme $\| \ \|_{E;\nu}$ de E,*

$$\|\langle f_n - f, \varphi \rangle\|_{E;\nu} \to 0.$$

(c) *Pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,*

$$\langle f_n, \varphi \rangle \to \langle f, \varphi \rangle \textit{ dans } E. \ ▮$$

Démonstration. D'après les définitions 1.3 (a) d'une suite convergente d'un espace semi-normé et 3.1 des semi-normes de $\mathcal{D}'(\Omega; E)$, $f_n \to f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ équivaut à : pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et tout $\nu \in \mathcal{N}_E$,

$$\|f_n - f\|_{\mathcal{D}'(\Omega;E);\varphi,\nu} = \|\langle f_n - f, \varphi \rangle\|_{E;\nu} \to 0.$$

C'est-à-dire, à nouveau d'après la définition 1.3 (a), à $\langle f_n - f, \varphi \rangle \to 0$ dans E. □

Convergence uniforme. Nous montrerons au théorème 8.28 que la convergence $f_n \to f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ équivaut à la convergence uniforme sur tout borné $\mathcal{B}$ de $\mathcal{D}(\Omega)$, c'est-à-dire, pour toute semi-norme de E,

$$\sup_{\varphi \in \mathcal{B}} \|\langle f_n - f, \varphi \rangle\|_{E;\nu} \to 0.$$

Nous établirons au théorème 8.27 l'équivalence avec une propriété plus forte, qui donne la convergence uniforme sur des ensembles non bornés de $\mathcal{D}(\Omega)$ (voir le commentaire *Comparaison des théorèmes 8.27 et 8.28*, p. 192). □

Convergence des fonctions continues. Rappelons que la convergence uniforme sur les compacts de fonctions continues entraîne leur convergence au sens des distributions d'après l'inclusion topologique du théorème 3.8, mais que leur convergence ponctuelle n'est ni plus forte ni moins forte que leur convergence au sens des distributions, voir le commentaire *Convergence des fonctions continues*, p. 53. □

Montrons que l'application $(f, \varphi) \mapsto \langle f, \varphi \rangle$ est séquentiellement continue[2].

Théorème 4.4. — *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et E un espace de Neumann. Alors :*

(a) *Pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, l'application $f \mapsto \langle f, \varphi \rangle$ est linéaire continue de $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ dans E.*

(b) *Pour toute $f \in \mathcal{D}'(\Omega; E)$, l'application $\varphi \mapsto \langle f, \varphi \rangle$ est linéaire continue de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans E.*

(c) *L'application $(f, \varphi) \mapsto \langle f, \varphi \rangle$ est bilinéaire séquentiellement continue du produit $\mathcal{D}'(\Omega; E) \times \mathcal{D}(\Omega)$ dans E.* ▌

Démonstration. Soit $\{\| \|_{E;\nu} : \nu \in \mathcal{N}_E\}$ la famille de semi-normes de E.

***1º** Propriété (a).* Par définition 3.1 des semi-normes de $\mathcal{D}'(\Omega; E)$, pour tout $\nu \in \mathcal{N}_E$,

$$\|\langle f, \varphi \rangle\|_{E;\nu} = \|f\|_{\mathcal{D}'(\Omega;E);\varphi,\nu}.$$

L'application $f \mapsto \langle f, \varphi \rangle$ est donc continue, d'après la caractérisation des applications linéaires continues du théorème 1.12 (a).

***2º** Propriété (b).* C'est la définition 3.1 d'une distribution.

***3º** Propriété (c).* Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que

$$f_n \to f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega; E), \quad \varphi_n \to \varphi \text{ dans } \mathcal{D}(\Omega).$$

2. **Historique du théorème 4.4.** Laurent SCHWARTZ démontra en 1950 [68, chap. 3, § 3, théorème XI, p. 73] que $\langle f_n, \varphi_n \rangle \to \langle f, \varphi \rangle$ quand $\varphi_n \to \varphi$ dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et $f_n \to f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$-unif, c'est-à-dire pour la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, et donc aussi dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, c'est-à-dire pour la convergence simple utilisée ici, puisque ces topologies coïncident sur les suites convergentes d'après son théorème XIII, p. 74.

Décomposons

$$\langle f_n, \varphi_n \rangle - \langle f, \varphi \rangle = \langle f_n - f, \varphi \rangle + \langle f_n, \varphi_n - \varphi \rangle. \tag{4.1}$$

D'après la caractérisation des suites convergentes de $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ du théorème 4.3 (c),

$$\langle f_n - f, \varphi \rangle \to 0_E \text{ dans } E. \tag{4.2}$$

D'autre part, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, comme toute suite convergente (théorème A.5). Le théorème 4.2 (b) montre alors qu'elle est équicontinue de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans E ; plus précisément, il donne, pour tout $\nu \in \mathcal{N}_E$, l'existence de $p \in \mathcal{C}^+(\Omega)$ telle que, pour toute $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\langle f_n, \phi \rangle\|_{E;\nu} \leq \|\phi\|_{\mathcal{D}(\Omega);p}.$$

En particulier,

$$\|\langle f_n, \varphi_n - \varphi \rangle\|_{E;\nu} \leq \|\varphi_n - \varphi\|_{\mathcal{D}(\Omega);p},$$

qui tend vers 0. Ceci, pour tout $\nu \in \mathcal{N}_E$, donc

$$\langle f_n, \varphi_n - \varphi \rangle \to 0_E \text{ dans } E.$$

D'où, avec (4.1) et (4.2),

$$\langle f_n, \varphi_n \rangle \to \langle f, \varphi \rangle \text{ dans } E. \ \square$$

Non-continuité de $\langle\ ,\ \rangle$. L'application $(f, \varphi) \mapsto \langle f, \varphi \rangle$ n'est pas continue de $\mathcal{D}'(\Omega; E) \times \mathcal{D}(\Omega)$ dans E, excepté si Ω est vide ou si E est réduit à $\{0_E\}$ (auquel cas $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ est de dimension nulle). En revanche, elle est continue sur les bornés de $\mathcal{D}'(\Omega; E) \times \mathcal{D}(\Omega)$. Ces propriétés sont démontrées dans [SIMON, 84], à paraître.

Dans le cas où $E = \mathbb{R}$, on peut observer que l'application $(f, \varphi) \mapsto \langle f, \varphi \rangle$ n'est pas continue de $\mathcal{D}'(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$, car elle n'est même pas continue lorsque $\mathcal{D}'(\Omega)$ est muni de sa topologie de dual de $\mathcal{D}(\Omega)$, qui est plus forte que la topologie simple utilisée ici, puisque la forme bilinéaire de dualité sur $F' \times F$ d'un espace semi-normé F n'est continue que si F est normable [vol. 1, théorème 13.22, p. 228]. $\square$

4.3. Complétude séquentielle de $\mathcal{D}'(\Omega; E)$

Montrons que $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ est séquentiellement complet[3], c'est-à-dire que ses suites de Cauchy convergent.

---

3. **Historique du théorème 4.5. Valeurs réelles.** Laurent SCHWARTZ démontra en 1950 [68, chap. 3, § 2, théorème XIII, p. 74] que, si une suite de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ converge simplement, alors sa limite est une distribution, ce qui entraîne que $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ muni de la topologie simple utilisée ici est un espace de Neumann.

Valeurs vectorielles. Laurent SCHWARTZ a démontré en 1957 [71, proposition 12, p. 50] que si E est complet ou quasi-complet (ce qui est plus fort que séquentiellement complet utilisé ici), alors $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d; E)$-unif (c'est-à-dire muni de la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, qui est plus forte que la topologie simple utilisée ici) a la même propriété.
Ceci n'entraîne pas que $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ est séquentiellement complet si E l'est, ce qui est la propriété, nouvelle, exprimée par le théorème 4.5.

Théorème 4.5. — *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et E un espace de Neumann. Alors,*

$$\mathcal{D}'(\Omega; E) \text{ est un espace de Neumann.}$$

En particulier, $\mathcal{D}'(\Omega)$ est un espace de Neumann. ▮

Démonstration. L'espace $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ étant semi-normé et séparé (théorème 3.2), il reste, par définition 1.4 d'un espace de Neumann, à vérifier qu'il est séquentiellement complet. Soit donc

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ une suite de Cauchy de } \mathcal{D}'(\Omega; E).$$

***1º** Obtention d'une limite f.* D'après les définitions 1.3 (b) d'une suite de Cauchy et 3.1 des semi-normes de $\mathcal{D}'(\Omega; E)$, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $\nu \in \mathcal{N}_E$, quand $n \to \infty$,

$$\sup_{m\geq n} \|f_n - f_m\|_{\mathcal{D}'(\Omega;E);\varphi,\nu} = \sup_{m\geq n} \|\langle f_n - f_m, \varphi\rangle\|_{E;\nu} \to 0.$$

La suite $(\langle f_n, \varphi\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors de Cauchy dans E, donc, puisque E est un espace de Neumann, elle a une limite, que l'on note $\langle f, \varphi\rangle$. C'est-à-dire,

$$\langle f_n, \varphi\rangle \to \langle f, \varphi\rangle \ \text{ dans } E.$$

Cette limite étant unique (théorème A.5) puisque E est séparé, ceci définit une application f de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans E, qui est linéaire puisque les f_n le sont.

***2º** Propriété de la limite.* Vérifions que f est une distribution. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, comme toute suite de Cauchy (théorème A.5). Le théorème 4.2 (b) montre alors qu'elle est équicontinue ; plus précisément, il donne, pour tout $\nu \in \mathcal{N}_E$, l'existence de $p_\nu \in \mathcal{C}^+(\Omega)$ tel que, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|\langle f_n, \varphi\rangle\|_{E;\nu} \leq \|\varphi\|_{\mathcal{D}(\Omega);p}.$$

À la limite,

$$\|\langle f, \varphi\rangle\|_{E;\nu} \leq \|\varphi\|_{\mathcal{D}(\Omega);p}.$$

Donc, d'après la caractérisation des distributions du théorème 3.3,

$$f \in \mathcal{D}'(\Omega; E).$$

***3º** Convergence des f_n.* Puisque f est une distribution, la définition 3.1, à nouveau, donne

$$\|f_n - f\|_{\mathcal{D}'(\Omega;E);\varphi,\nu} = \|\langle f_n, \varphi\rangle - \langle f, \varphi\rangle\|_{E;\nu} \to 0.$$

Ainsi,

$$f_n \to f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega; E).$$

Ce qui prouve que $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ est bien séquentiellement complet.

***4º** Le cas réel.* L'espace $\mathcal{D}'(\Omega) = \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R})$ est un espace de Neumann car $\mathbb{R}$ est un espace de Banach (théorème A.26 (a)), et donc de Neumann, par définition 1.4. □

Non-métrisabilité. L'espace $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ n'est pas métrisable, et n'est donc pas un espace de Fréchet, excepté si Ω est vide ou si E est réduit à $\{0_E\}$ (auquel cas il est de dimension nulle) [SIMON, 84, à paraître]. $\square$

Non-complétude. L'espace $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ n'est pas complet, même si E est complet, quand il est muni, comme dans tout ce livre, de la topologie simple. Mais, si E est quasi-complet, c'est-à-dire si ses parties bornées sont complètes, $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ est quasi-complet [SIMON, 84].

En revanche, $\mathcal{D}'(\Omega; E)\text{-unif}$, c'est-à-dire muni de la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de $\mathcal{D}(\Omega)$, est complet si E est complet, voir [SCHWARTZ, 71, proposition 12, p. 50, avec $m = \infty$] dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^d$. $\square$

4.4. Compacité séquentielle dans $\mathcal{D}'(\Omega; E)$

Caractérisons les ensembles relativement séquentiellement compacts de distributions, c'est-à-dire ceux dont chaque suite a une sous-suite convergente[4].

Théorème 4.6. — *Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{D}'(\Omega; E)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et E est un espace de Neumann. Alors,*

toute suite de $\mathcal{F}$ a une sous-suite qui converge dans $\mathcal{D}'(\Omega; E)$

si, et seulement si, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\text{toute suite de } \{\langle f, \varphi\rangle : f \in \mathcal{F}\} \text{ a une sous-suite qui converge dans } E. \tag{4.3}$$

Démonstration. Soit $\{\| \|_{E;\nu} : \nu \in \mathcal{N}_E\}$ la famille de semi-normes de E.

1º Nécessité de (4.3). Supposons que

toute suite de $\mathcal{F}$ a une sous-suite qui converge dans $\mathcal{D}'(\Omega; E)$.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\{\langle f, \varphi\rangle : f \in \mathcal{F}\}$, c'est-à-dire de la forme, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$g_n = \langle f_n, \varphi\rangle, \text{ où } f_n \in \mathcal{F}.$$

Par hypothèse, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une sous-suite $(f_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $\mathcal{D}'(\Omega; E)$. D'après la caractérisation des suites convergentes de $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ du théorème 4.3 (c), $(\langle f_{\sigma(n)}, \varphi\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans E.

C'est-à-dire, $(g_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans E, ce qui prouve (4.3).

4. **Historique du théorème 4.6.** Ce résultat est nouveau, à la connaissance de l'auteur.

2º Suffisance de (4.3). Supposons maintenant que

toute suite de $\{\langle f, \varphi\rangle : f \in \mathcal{F}\}$ *a une sous-suite qui converge dans* $\mathcal{D}'(\Omega; E)$.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{F}$. Extrayons-en une sous-suite convergente, en trois étapes.

2.a. *Équicontinuité de* $\mathcal{F}$. Pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, l'ensemble $\langle \mathcal{F}, \varphi\rangle$ est borné dans E, car un ensemble dont toute suite a une sous-suite convergente est borné (théorème A.20). Donc, d'après la caractérisation de ses bornés du théorème 4.1 (c),

$$\mathcal{F} \text{ est borné dans } \mathcal{D}'(\Omega; E).$$

Le théorème 4.2 (b) montre alors qu'il est équicontinu ; plus précisément, il donne, pour tout $\nu \in \mathcal{N}_E$, l'existence de $p_\nu \in \mathcal{C}^+(\Omega)$ tel que, pour toutes les fonctions $f \in \mathcal{F}$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\|\langle f, \varphi\rangle\|_{E;\nu} \leq \|\varphi\|_{\mathcal{D}(\Omega);p_\nu}. \tag{4.4}$$

2.b. *Extraction d'une sous-suite* $(f_{\sigma_n(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Soit

$$(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ une suite séquentiellement dense dans } \mathcal{D}(\Omega),$$

donnée par le théorème 2.16.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(\langle f_n, \phi_k\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ possède, par hypothèse, une sous-suite convergente, disons $(\langle f_{\sigma_k(n)}, \phi_k\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$. Par extractions successives, on peut choisir les sous-suites emboîtées, c'est-à-dire telles que $(\sigma_{k+1}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ soit une sous-suite de $(\sigma_k(n))_{n\in\mathbb{N}}$. Alors[5],

$$\text{la suite diagonale } (\langle f_{\sigma_n(n)}, \phi_k\rangle)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge pour chaque } k, \tag{4.5}$$

comme toute sous-suite d'une suite convergente (théorème A.5 ; ici, c'est une sous-suite de $(\langle f_{\sigma_k(n)}, \phi_k\rangle)_{n\geq k}$).

2.c. *Convergence de* $(f_{\sigma_n(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Notons $\sigma(n) \overset{\text{def}}{=} \sigma_n(n)$. Étant donné $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, décomposons

$$\langle f_{\sigma(m)} - f_{\sigma(n)}, \varphi\rangle = \langle f_{\sigma(m)} - f_{\sigma(n)}, \phi_k\rangle + \langle f_{\sigma(m)}, \varphi - \phi_k\rangle + \langle f_{\sigma(n)}, \varphi - \phi_k\rangle.$$

Pour $\nu \in \mathcal{N}_E$ et $\epsilon > 0$, estimons le second membre en choisissant d'abord $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|\varphi - \phi_k\|_{\mathcal{D}(\Omega);p_\nu} \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

5. **Historique du procédé diagonal de Cantor.** La construction d'une sous-suite diagonale d'une série de suites emboîtées fut introduite par Georg CANTOR, voir ses œuvres [15].

Puis, grâce à (4.5), choisissons n_0 assez grand pour que, pour tout $m \geq n_0$ et $n \geq n_0$, on ait

$$\|\langle f_{\sigma(m)} - f_{\sigma(n)}, \phi_k \rangle\|_{E;\nu} \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Alors, avec (4.4),

$$\|\langle f_{\sigma(m)} - f_{\sigma(n)}, \varphi \rangle\|_{E;\nu} \leq \epsilon.$$

C'est-à-dire, $\|f_{\sigma(m)} - f_{\sigma(n)}\|_{\mathcal{D}'(\Omega;E);\varphi,\nu} \leq \epsilon$, par définition 3.1 des semi-normes de $\mathcal{D}'(\Omega; E)$. Ce qui, par définition 1.3 (b) d'une suite de Cauchy, prouve que

$$(f_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite de Cauchy de } \mathcal{D}'(\Omega; E).$$

Elle converge, puisque $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ est séquentiellement complet (théorème 4.5). Ainsi,

$$(f_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une sous-suite convergente de } (f_n)_{n\in\mathbb{N}}. \quad \square$$

Montrons que les bornés de $\mathcal{D}'(\Omega)$ sont relativement séquentiellement compacts[6].

Théorème 4.7. — *Toute suite bornée de $\mathcal{D}'(\Omega)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, a une sous-suite qui converge.* ▮

Démonstration. Soit

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ une suite bornée de } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, l'ensemble $\{\langle f_n, \varphi\rangle : n \in \mathbb{N}\}$ est borné dans $\mathbb{R}$ d'après la caractérisation des ensembles bornés de distributions du théorème 4.1 (c). Donc, d'après le théorème de Bolzano–Weierstrass (théorème A.26 (c)),

$$\text{chaque suite de } \{\{\langle f_n, \varphi\rangle : n \in \mathbb{N}\}\} \text{ a une sous-suite convergente.}$$

La caractérisation des ensembles de distributions relativement séquentiellement compacts du théorème 4.6 montre alors que

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ a une sous-suite convergente.} \quad \square$$

6. **Historique du théorème 4.7.** Laurent SCHWARTZ démontra en 1950 [68, chap. 3, § 3, théorème XII, p. 74] que, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$-unif, tout borné est relativement compact.
A priori, ceci n'entraîne pas le théorème 4.7, car il existe des espaces semi-normés dans lesquels *relativement compact* **n'entraîne pas** *relativement séquentiellement compact* [vol. 1, propriétés (2.6) et (2.7), p. 43]. Observons toutefois que, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$, ces deux notions de compacité coïncident d'après la propriété (4.7).

Ensembles de distributions compacts. Les ensembles relativement compacts de distributions peuvent être caractérisés, pour tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ et tout espace de Neumann E, ainsi [SIMON, 84, à paraître] :

$$\begin{cases} \textit{Un ensemble } \mathcal{F} \textit{ est relativement compact dans } \mathcal{D}'(\Omega; E) \textit{ si et seulement si, pour} \\ \textit{toute } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \textit{ l'ensemble } \{\langle f, \varphi \rangle : f \in \mathcal{F}\} \textit{ est relativement compact dans } E. \end{cases} \tag{4.6}$$

Dans $\mathcal{D}'(\Omega; E)$, comme dans tout espace, un ensemble est compact si, de plus, il est fermé.

Puisque *relativement compact* coïncide avec *relativement séquentiellement compact* dans un espace E métrisable (théorème A.23 (a)), il en résulte, avec la caractérisation du théorème 4.6, que :

$$\begin{cases} \textit{Si } E \textit{ est un espace de Fréchet, un ensemble est relativement compact dans} \\ \mathcal{D}'(\Omega; E) \textit{ si et seulement si il y est relativement séquentiellement compact.} \end{cases} \tag{4.7}$$

□

espaces semi-normés séparés

Compact *versus* séquentiellement compact. Il existe des espaces semi-normés séparés dans lesquels *compact* n'est ni plus fort ni moins fort que *séquentiellement compact* [vol. 1, propriétés (2.6) et (2.7), p. 43]. Si c'est le cas dans un espace E, c'est également le cas dans $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ [SIMON, 84]. □

4.5. Changement de l'espace E des valeurs

Montrons que, si l'espace E des valeurs est inclus dans un espace «plus gros», il en va de même des espaces de distributions correspondants. Commençons par le cas d'une inclusion topologique.

Théorème 4.8. — *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, et E et F deux espaces de Neumann tels que*

$$E \underset{\rightarrow}{\subseteq} F.$$

Alors,

$$\mathcal{D}'(\Omega; E) \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{D}'(\Omega; F). \blacksquare$$

Démonstration. Notons $\{\| \ \|_{E;\nu} : \nu \in \mathcal{N}_E\}$ et $\{\| \ \|_{F;\mu} : \mu \in \mathcal{N}_F\}$ les familles de semi-normes de E et F.

Par définition 1.7 (c) d'une inclusion topologique, pour tout $\mu \in \mathcal{N}_F$, il existe un ensemble fini N de $\mathcal{N}_E$ et $c \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $u \in E$,

$$\|u\|_{F;\mu} \le c \sup_{\nu \in N} \|u\|_{E;\nu}.$$

Alors, par définition 3.1 des semi-normes de $\mathcal{D}'(\Omega; E)$, pour toutes les fonctions $f \in \mathcal{D}'(\Omega; F)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\|f\|_{\mathcal{D}'(\Omega;F);\varphi,\mu} = \|\langle f, \varphi \rangle\|_{F;\mu} \le c \sup_{\nu \in N} \|\langle f, \varphi \rangle\|_{E;\nu} = c \sup_{\nu \in N} \|f\|_{\mathcal{D}'(\Omega;E);\varphi,\nu}.$$

Ce qui, à nouveau d'après la définition 1.7 (c), donne

$$\mathcal{D}'(\Omega; E) \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{D}'(\Omega; F). \ \square$$

Venons-en au cas d'une inclusion qui est seulement « séquentiellement continue ».

Théorème 4.9. — *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, et E et F deux espaces de Neumann tels que E est un sous-espace vectoriel de F et*

l'identité est séquentiellement continue de E dans F.

Alors, $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}'(\Omega; F)$ et

l'identité est séquentiellement continue de $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega; F)$. ▮

Démonstration. ***1º*** *Inclusion de $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega; F)$.* Soit

$$f \in \mathcal{D}'(\Omega; E).$$

D'après la caractérisation des distributions du théorème 3.4 (b), f est séquentiellement continue de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans E. C'est-à-dire que $\varphi_n \to \varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ entraîne $\langle f, \varphi_n \rangle \to \langle f, \varphi \rangle$ dans E, et donc dans F, par hypothèse. Étant linéaire de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans E, et donc dans F, il en résulte, à nouveau d'après le théorème 3.4 (b), que

$$f \in \mathcal{D}'(\Omega; F).$$

Donc, $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ est inclus dans $\mathcal{D}'(\Omega; F)$. Et c'en est un sous-espace vectoriel.

2º *Continuité de l'identité.* Soit

$$f_n \to f \ \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega; E).$$

D'après la caractérisation des suites convergentes de $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ du théorème 4.3 (c), pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\langle f_n, \varphi \rangle \to \langle f, \varphi \rangle$ dans E, et donc dans F, par hypothèse. Alors, à nouveau d'après le théorème 4.3 (c),

$$f_n \to f \ \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega; F).$$

Ce qui prouve la continuité séquentielle de l'identité de $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega; F)$. □

Autres démonstrations. Les théorèmes 4.8 et 4.9 sont des cas particuliers des propriétés (b) et (a) du théorème 5.14, sur la continuité dans les espaces de distributions de l'application $f \mapsto Lf$ associée à une application linéaire L, en l'occurrence l'identité de E dans F. □

Terminons par le cas d'une inclusion topologique « séquentiellement compactante », c'est-à-dire telle que les bornés de E sont relativement séquentiellement compacts dans F[7].

---

7. **Historique du théorème 4.10.** Ce résultat est nouveau à notre connaissance, bien que simple.

Théorème 4.10. — *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, et E et F deux espaces de Neumann tels que $E \underset{\to}{\subseteq} F$ et*

toute suite bornée de E a une sous-suite qui converge dans F.

Alors, $\mathcal{D}'(\Omega; E) \underset{\to}{\subseteq} \mathcal{D}'(\Omega; F)$ et

toute suite bornée de $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ a une sous-suite qui converge dans $\mathcal{D}'(\Omega; F)$. ▮

Démonstration. L'inclusion $\mathcal{D}'(\Omega; E) \underset{\to}{\subseteq} \mathcal{D}'(\Omega; F)$ étant donnée par le théorème 4.8, puisque $E \underset{\to}{\subseteq} F$, il reste à établir l'existence de sous-suites convergentes. Soit donc

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ une suite bornée de } \mathcal{D}'(\Omega; E).$$

Pour éviter toute ambiguïté, notons $\dot{f}_n$ l'application de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans F. D'après la caractérisation des bornés de $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ du théorème 4.1 (c), pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, la suite $(\langle f_n, \varphi\rangle)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans E, donc, par hypothèse,

$$(\langle \dot{f}_n, \varphi\rangle)_{n\in\mathbb{N}} \text{ a une sous-suite qui converge dans } F.$$

La caractérisation des ensembles de distributions relativement séquentiellement compacts du théorème 4.6 montre alors que

$$(\dot{f}_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ a une sous-suite qui converge dans } \mathcal{D}'(\Omega; F). \ \square$$

Autre formulation du théorème 4.10. Si l'injection de E dans F est **séquentiellement compactante**, il en est de même de l'injection de $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega; F)$.

Rappelons qu'une application est dite *séquentiellement compactante* si elle transforme les bornés en ensembles relativement séquentiellement compacts [vol. 1, définition 8.14]. C'est une **définition nouvelle**, donc le lecteur devra en rappeler le sens s'il l'emploie. Dans les espaces normés, cette notion coïncide [volume 1, propriété (8.6), p. 149] avec *compacte*, c'est-à-dire [SCHWARTZ, 72, définition 101, p. 419] avec l'existence d'un ouvert d'image relativement compacte (ou relativement séquentiellement compacte). Mais, en général, la notion d'application compacte est trop forte pour nos besoins, car, dans un espace de dimension infinie, il n'existe pas d'ouverts relativement séquentiellement compacts. □

4.6. Espace E-faible

Avant d'étudier les distributions à valeurs dans E-faible, au prochain paragraphe, définissons cet espace et donnons-en les propriétés dont nous avons besoin.

Définissons la topologie faible d'un espace semi-normé séparé E, ou plus précisément des semi-normes qui l'engendrent. Elles font intervenir le **dual** E' de E, c'est-à-dire l'ensemble des applications linéaires continues de E dans $\mathbb{R}$. On note

$$\langle e', e\rangle \overset{\text{def}}{=} e'(e) \ \text{ quand } e' \in E' \text{ et } e \in E.$$

Définition 4.11. — *Soit E un espace semi-normé séparé. On note* $E\text{-faible}$ *l'espace vectoriel E muni des semi-normes, indexées par $e' \in E'$,*

$$\|e\|_{E\text{-faible};e'} \stackrel{\text{def}}{=} |\langle e', e\rangle|. \blacksquare$$

Rappelons que $E\text{-faible}$ est séparé [vol. 1, théorème 15.2], car, si $\langle e', e\rangle = 0$ pour tout $e' \in E'$, alors $e = 0_E$ d'après un corollaire [vol. 1, théorème 14.4] du théorème de Hahn–Banach. Comparons sa topologie à la topologie initiale.

Théorème 4.12. — *Pour tout espace semi-normé séparé E,*

$$E \underset{\to}{\subseteq} E\text{-faible}. \blacksquare$$

Démonstration. Soit $e' \in E'$. D'après la caractérisation des applications linéaires continues du théorème 1.12 (a), il existe un ensemble fini N de $\mathcal{N}_E$ et $c \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $e \in E$, on ait $|\langle e', e\rangle| \leq c \sup_{\nu\in N} \|e\|_{E;\nu}$. C'est-à-dire, par définition 4.11,

$$\|e\|_{E\text{-faible};e'} \leq c \sup_{\nu\in N} \|e\|_{E;\nu}.$$

Ce qui prouve que $E \underset{\to}{\subseteq} E\text{-faible}$, par définition 1.7 (c) d'une inclusion topologique. □

Montrons que E est séquentiellement complet si $E\text{-faible}$ l'est[8].

Théorème 4.13. — *Soit E un espace semi-normé séparé.*

Si $E\text{-faible}$ *est un espace de Neumann, E est un espace de Neumann.* $\blacksquare$

Démonstration. Soit

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ une suite de Cauchy de } E.$$

Puisque $E \underset{\to}{\subseteq} E\text{-faible}$ (théorème 4.12), cette suite est de Cauchy dans $E\text{-faible}$ (théorème A.6). Si $E\text{-faible}$ est un espace de Neumann, elle y converge vers une limite, disons

$$u_n \to u \ \text{ dans } E\text{-faible}.$$

---

8. **Historique du théorème 4.13.** Il était connu que, si E-faible est quasi-complet, c'est-à-dire si ses parties bornées sont complètes, il en est de même de E, voir par exemple [SCHAEFER, 66, 5.5 (a) et (e) et corollaire 1, p. 144], où la paternité n'est pas précisée.
Ceci n'entraîne pas que E est séquentiellement complet si E-faible l'est, c'est-à-dire le théorème 4.13, nouveau à notre connaissance, car quasi-complet est plus fort que séquentiellement complet.

Soit $\| \ \|_{E;\nu}$ une semi-norme de E et $\epsilon > 0$. Par définition 1.3 (b) d'une suite de Cauchy de E, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq k$,

$$\|u_n - u_k\|_{E;\nu} \leq \epsilon. \tag{4.8}$$

Soit

$$U = \{v \in E : \|v - u_k\|_{E;\nu} \leq \epsilon\}.$$

C'est un convexe fermé de E. Comme tout convexe fermé de E, il est fermé dans $E\text{-faible}$ d'après le théorème de Mazur (théorème A.42). Tout ensemble fermé étant séquentiellement fermé (théorème A.10),

$$U \text{ est séquentiellement fermé dans } E\text{-faible}.$$

Puisque u_n appartient à U pour tout $n \geq k$, sa limite u y appartient aussi. C'est-à-dire,

$$\|u - u_k\|_{E;\nu} \leq \epsilon.$$

Avec (4.8), ceci donne $\|u - u_n\|_{E;\nu} \leq 2\epsilon$, pour tout $n \geq k$. Ceci, pour toute semi-norme de E et tout $\epsilon > 0$ (avec k dépendant de ϵ et de la semi-norme). Donc,

$$u_n \to u \text{ dans } E.$$

Ce qui prouve que E est séquentiellement complet, c'est-à-dire de Neumann. □

Quelques cas où E-faible est un espace de Neumann. Rappelons que E-faible est un espace de Neumann si E est un espace de Hilbert, ou est réflexif ou semi-réflexif [vol. 1, théorèmes 17.7 et 17.12].

Le théorème 4.13 montre qu'il est nécessaire que E soit de Neumann pour que E-faible le soit. Observons que ce n'est pas suffisant : par exemple, $L^1(\mathbb{R})$ est un espace de Banach, mais $L^1(\mathbb{R})$-faible n'est pas un espace de Neumann ; en effet, toute suite régularisante $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la définition 8.1 est de Cauchy dans $L^1(\mathbb{R})$-faible mais n'y converge pas, car elle converge vers δ_0 dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (théorème 8.3). □

4.7. Espace $\mathcal{D}'(\Omega; E\text{-faible})$ et extractabilité

Montrons que toute **distribution à valeurs dans E-faible**[9] est une distribution à valeurs dans E.

Théorème 4.14. — *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et E un espace semi-normé séparé tel que*

$$E\text{-faible } \textit{est un espace de Neumann.}$$

9. **Historique du théorème 4.14.** L'égalité $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d; E) = \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d; E\text{-faible})$ est implicite dans *Théorie des distributions à valeurs vectorielles* de Laurent SCHWARTZ [71, propriété (ε), p. 53, et exemples, p. 55].

Alors, E est un espace de Neumann,

$$\mathcal{D}'(\Omega; E) = \mathcal{D}'(\Omega; E\text{-faible}),$$

ces deux espaces ont les mêmes bornés, et

$$\mathcal{D}'(\Omega; E) \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{D}'(\Omega; E\text{-faible}). \blacksquare$$

Démonstration. ***1º*** *Complétude séquentielle de E.* L'espace E-faible étant de Neumann, E l'est aussi d'après le théorème 4.13. Ceci permet de définir $\mathcal{D}'(\Omega; E)$.

2º *Égalité algébrique.* Une distribution de $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ est, d'après la caractérisation du théorème 3.4 (e), une application linéaire de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans E qui, pour tout compact K inclus dans Ω, transforme les bornés de $\mathcal{C}^\infty_K(\Omega)$ en bornés de E.

Donc, puisque E et E-faible sont algébriquement égaux (par définition 4.11 de E-faible) et ont les mêmes bornés d'après le théorème de Banach–Mackey (théorème A.41),

$$\mathcal{D}'(\Omega; E) = \mathcal{D}'(\Omega; E\text{-faible}).$$

3º *Inclusion topologique.* Puisque $E \underset{\rightarrow}{\subseteq} E$-faible (théorème 4.12), le théorème 4.8 relatif au changement de l'espace des valeurs donne

$$\mathcal{D}'(\Omega; E) \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{D}'(\Omega; E\text{-faible}).$$

4º *Égalité des familles de bornés.* D'après la caractérisation du théorème 4.1 (c), un borné de $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ est un ensemble $\mathcal{F}$ tel que, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\{\langle f, \varphi\rangle : f \in \mathcal{F}\} \text{ est borné dans } E.$$

On peut ici remplacer E par E-faible puisqu'ils ont les mêmes bornés, comme nous venons de le rappeler, donc

$$\mathcal{D}'(\Omega; E) \text{ et } \mathcal{D}'(\Omega; E\text{-faible}) \text{ ont les mêmes bornés.} \ \square$$

Montrons que, si toute suite bornée de E a une sous-suite qui converge dans E-faible, toute suite bornée de $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ a une sous-suite qui converge dans $\mathcal{D}'(\Omega; E\text{-faible})$.

Théorème 4.15. — *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et E un espace semi-normé séparé tel que*

$$\textit{toute suite bornée de } E \textit{ a une sous-suite qui converge dans } E\text{-faible}. \tag{4.9}$$

Alors, E et E-faible sont des espaces de Neumann et

$$\textit{toute suite bornée de } \mathcal{D}'(\Omega; E) \textit{ a une sous-suite qui converge dans } \mathcal{D}'(\Omega; E\text{-faible}).$$

$\blacksquare$

Démonstration. L'hypothèse (4.9) signifie que E est extractable (définition A.43), ce qui entraîne (théorème A.44) que $E\text{-faible}$ est un espace de Neumann. Alors (théorème 4.13), E est lui aussi un espace de Neumann.

Puisque $E \underset{\rightarrow}{\subseteq} E\text{-faible}$ (théorème 4.12), ceci permet d'appliquer le théorème 4.10 avec $F = E\text{-faible}$, ce qui donne la propriété énoncée. □

Terminologie. Bien que leur propriété soit abondamment utilisée dans la littérature, les espaces extractables n'étaient pas baptisés et n'étaient pas étudiés en tant que tels, ce que nous avons fait dans le volume 1 [80]. □

Pour les distributions à valeurs réelles, montrons que la topologie simple de $\mathcal{D}'(\Omega)$ que nous utilisons coïncide avec sa topologie faible.

Théorème 4.16. — *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Alors,*

$$\mathcal{D}'(\Omega)\text{-faible} \underset{\leftrightarrow}{=} \mathcal{D}'(\Omega). \;\blacksquare$$

Démonstration. Étant donné $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on définit $T \in (\mathcal{D}'(\Omega))'$ par : pour toute $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$,

$$T(f) \overset{\text{def}}{=} \langle f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)}.$$

En effet, T est linéaire et, par définition 3.1 des semi-normes de $\mathcal{D}'(\Omega)$,

$$|T(f)| = \|f\|_{\mathcal{D}'(\Omega);\varphi},$$

ce qui entraîne que T est continue de $\mathcal{D}'(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ d'après la caractérisation des applications linéaires continues du théorème 1.12 (a).

D'où, avec la définition 4.11 d'une semi-norme de la topologie faible,

$$\|f\|_{\mathcal{D}'(\Omega);\varphi} = |\langle T, f \rangle_{(\mathcal{D}'(\Omega))'\times\mathcal{D}'(\Omega)}| = \|f\|_{\mathcal{D}'(\Omega)\text{-faible};T}.$$

Par définition 1.7 (c) d'une inclusion topologique, ceci prouve que

$$\mathcal{D}'(\Omega)\text{-faible} \underset{\rightarrow}{\subseteq} \mathcal{D}'(\Omega).$$

L'inclusion inverse est donnée par le théorème 4.12. □

Réflexivité. Nous n'abordons pas dans ce livre les propriétés de réflexivité de $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ — elles le sont dans [SIMON, 84, à paraître] —, car elles ne nous serviront pas pour l'étude des edp dans les volumes suivants. En revanche, nous utiliserons les propriétés d'extractabilité de sous-suites des théorèmes 4.7 et 4.15.

Semi-réflexivité et extractabilité sont des propriétés voisines mais distinctes : la semi-réflexivité d'un espace E équivaut à ce que ses bornés soient *relativement compacts* dans $E\text{-faible}$ (théorème de Banach-Alaoglu–Bourbaki, voir le théorème 17.19 du volume 1), tandis que l'extractabilité équivaut (définition A.43) à ce qu'ils soient *relativement séquentiellement compacts*, toujours dans $E\text{-faible}$.

Observons que $\mathcal{D}'(\Omega)$, muni comme ici de la topologie simple, est semi-réflexif mais qu'il n'est pas réflexif. En revanche, $\mathcal{D}'(\Omega)\text{-unif}$, c'est-à-dire muni de la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de $\mathcal{D}(\Omega)$ utilisée Laurent SCHWARTZ, est réflexif. □

Chapitre 13

Existence de primitives de distributions

Ce chapitre est consacré à l'obtention de conditions pour qu'un champ de distributions $q = (q_1, \ldots, q_d)$ ait une primitive f, c'est-à-dire pour que $\nabla f = q$, dont les principales sont :
— Dans un ouvert Ω quelconque, il suffit que q soit orthogonal aux champs tests à divergence nulle, c'est-à-dire que $\langle q, \psi \rangle = 0$ pour tout ψ tel que $\nabla \cdot \psi = 0$. C'est le *théorème d'orthogonalité* pour les distributions (théorème 13.5).
— Lorsque Ω est simplement connexe, il suffit que q vérifie la condition de Poincaré $\partial_i q_j = \partial_j q_i$ pour tout i et j. C'est le *théorème de Poincaré* généralisé aux distributions (théorème 13.7).

Ces conditions sont nécessaires et suffisantes.

Nous démontrons ces résultats ainsi :
— Nous ramenons d'abord l'existence d'une primitive dans Ω à l'existence d'une primitive dans chacune de ses parties $\Omega_{1/n} = \{x : B(x, 1/n) \subset \Omega\}$, c'est-à-dire dans Ω privé d'un voisinage de sa frontière de largeur $1/n$. C'est le *théorème de recollement périphérique de primitives* (théorème 13.1).
— Ensuite, nous ramenons l'existence d'une primitive d'un champ de distributions q à l'existence d'une primitive d'un champ de fonctions, en l'occurrence $q \diamond \eta_n$ dans $\Omega_{1/n}$, lorsque q satisfait la condition de Poincaré. C'est le théorème 13.2 *de réduction au cas des fonctions*.
— Le théorème d'orthogonalité pour les distributions résulte alors aisément du théorème d'orthogonalité pour les fonctions (théorème 11.4).
— L'obtention du théorème de Poincaré pour les distributions est plus délicate, car les $\Omega_{1/n}$ ne sont pas nécessairement simplement connexes, donc on ne peut pas appliquer directement le théorème de Poincaré relatif aux fonctions (théorème 11.5). Nous tournons cette difficulté en jonglant avec n et la circulation sur des lacets homotopes.

Nous complétons ces résultats en :
— Montrant que, en dimension deux, tout champ de distributions incompressible dans un ouvert simplement connexe dérive d'une ⟪fonction de courant⟫, qui est ici une distribution scalaire. C'est le *lemme de Haar* (théorème 13.8).
— Montrant que, si Ω est simplement connexe, l'existence de primitives locales entraîne l'existence d'une primitive globale (théorème 13.9) et en donnant des contre-exemples dans le cas contraire (théorèmes 13.10 et 13.11).
— Comparant les diverses conditions d'existence d'une primitive, au § 13.7.

13.1. Recollement périphérique de primitives

Montrons que, si un champ de distributions est un gradient dans chaque $\Omega_{1/n}$, c'est un gradient dans tout Ω. Nous nommons ce résultat **théorème de recollement périphérique de primitives**.

Théorème 13.1. — *Soit $q \in \mathcal{D}'(\Omega; E^d)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et E est un espace de Neumann, et $\Omega_{1/n} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^d : B(x, 1/n) \subset \Omega\}$.*

Supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $f_n \in \mathcal{D}'(\Omega_{1/n}; E)$ telle que

$$\nabla f_n = q \ \text{ dans } \Omega_{1/n}.$$

Alors, il existe $f \in \mathcal{D}'(\Omega, E)$ telle que

$$\nabla f = q. \ \blacksquare$$

Attention. Les primitives f_n **ne se recollent pas nécessairement**, car elles peuvent différer d'une constante. Même en retranchant cette constante, elles ne se recollent pas toujours, par exemple si $\Omega_{1/n}$ n'est pas connexe et $\Omega_{1/(n+1)}$ l'est.

C'est le cas si Ω est, comme sur la figure13.1, une « haltère » constituée de deux boules de rayon 1 reliées par un tube de rayon $1/2$; alors $\Omega_{1/2}$ est constitué de deux boules « pointues » de rayon $1/2$ disjointes tandis que $\Omega_{1/3}$ est une haltère connexe. Alors, une primitive de $q = 0$ est donnée dans $\Omega_{1/2}$ par $f_2 = 0$ dans la boule de gauche et $f_2 = 1$ dans la boule de droite ; elle ne peut pas se raccorder à la primitive donnée dans $\Omega_{1/3}$ par $f_3 = 0$, même en retranchant une constante de celle-ci.

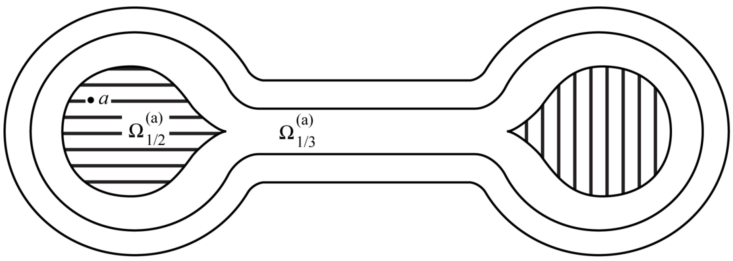

Figure 13.1. *Composantes connexes $\Omega^{(a)}_{1/n}$ de $\Omega_{1/n}$ contenant a. $\Omega^{(a)}_{1/2}$ est hachurée horizontalement, $\Omega_{1/2}$ est la réunion des deux zones hachurées et $\Omega^{(a)}_{1/3}$ est l'haltère intérieure ; elle coïncide avec $\Omega_{1/3}$* □

Terminologie. Nous qualifions le recollement du théorème 13.1 de **périphérique** pour le distinguer du *recollement de primitives locales* (théorème 13.9), dans lequel on recolle dans tout Ω, et pas seulement à sa périphérie, des primitives qui ne sont données que dans des boules.

Nous parlons de recollement **de** primitives, pas **des** primitives, pour souligner que, comme nous venons de l'expliquer, les primitives f_n ne se recollent pas nécessairement, mais qu'il en existe qui se recollent. □

Démonstration du théorème 13.1. ***1º*** *Cas où Ω est connexe : méthode.* Soit $a \in \Omega$ et

$$\Omega_{1/n}^{(a)} \text{ la composante connexe de } \Omega_{1/n} \text{ contenant } a.$$

Nous allons construire des primitives g_n dans $\Omega_{1/n}^{(a)}$ qui se recollent en privant chaque f_n d'une constante adéquate. Plus précisément, pour chaque $n \geq 1$, $g_n \in \mathcal{D}'(\Omega_{1/n}^{(a)}; E)$ et

$$\nabla g_n = q \ \text{ dans } \Omega_{1/n}^{(a)}, \tag{13.1}$$

et, pour chaque $n \geq 2$,

$$g_n = g_{n-1} \ \text{ dans } \Omega_{1/(n-1)}^{(a)}. \tag{13.2}$$

Ceci a un sens car $\Omega_{1/(n-1)}^{(a)} \subset \Omega_{1/n}^{(a)}$.

2º *Construction des g_n.* Choisissons pour g_1 la restriction de f_1 à $\Omega_1^{(a)}$, puis procédons par récurrence sur n, en supposant g_{n-1} déterminée. Puisque la restriction du gradient est le gradient de la restriction (théorème 6.4),

$$\nabla(f_n - g_{n-1}) = q - q = 0_E \ \text{ dans } \Omega_{1/(n-1)}^{(a)}.$$

Cet ensemble étant connexe (par construction), $f_n - g_{n-1}$ y est constant d'après le théorème 12.3. En retranchant cette constante de f_n on obtient une (la seule) distribution $g_n \in \mathcal{D}'(\Omega_{1/n}^{(a)}; E)$ satisfaisant (13.1) et (13.2).

3º *Recollement des g_n.* Puisque, pour l'instant, Ω est connexe, c'est la réunion des $\Omega_{1/n}^{(a)}$ (théorème 10.21). La propriété (13.2) entraîne donc, d'après le théorème de recollement des distributions (théorème 6.16), l'existence de $f \in \mathcal{D}'(\Omega; E)$ telle que

$$f = g_n \ \text{ dans chaque } \Omega_{1/n}^{(a)}.$$

Avec (13.1), il en résulte que

$$\nabla f = \nabla g_n = q \ \text{ dans chaque } \Omega_{1/n}^{(a)},$$

donc le théorème de recollement des égalités (théorème 6.10) montre que

$$\nabla f = q \ \text{ dans } \Omega.$$

4º *Cas général.* Maintenant, Ω est un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^d$. Le cas d'un ouvert connexe fournit une primitive f_m dans chaque composante connexe Ω_m de Ω. Pour tout m et m',

$$f_m = f_{m'} \ \text{ dans } \Omega \cap \Omega_{m'},$$

puisque cette intersection est vide. Donc, le théorème de recollement des distributions, à nouveau, montre que ces f_m un recollement f dans tout Ω. Enfin, le théorème de recollement des égalités, à nouveau, montre que

$$\nabla f = q \ \text{ dans } \Omega. \ \square$$

Exemples d'ouverts connexes Ω tels que $\Omega_{1/n}$ n'est pas connexe. Si Ω est connexe et borné et si sa frontière est régulière, par exemple si c'est une variété $\mathcal{C}^1$, les $\Omega_{1/n}$ sont connexes à partir d'un certain rang n, donc il suffirait de partir de celui-ci pour que les f_n se recollent à une constante près. C'est le cas de l'《haltère》 de la figure 13.1, p. 266.

Mais il existe des ouverts connexes bornés dont aucun des $\Omega_{1/n}$ n'est connexe. C'est le cas si, comme sur la figure 13.2, Ω est constitué d'une suite de boules de rayon 2^{2-m}, $m \geq 1$, reliées par des tubes de rayon 2^{-m} et de même longueur. En effet, $\Omega_{1/n}$ a toujours deux composantes connexes, la première commune aux disques reliés par des tubes de rayon $2^{-m} > 1/n$, la seconde incluse dans le disque suivant.

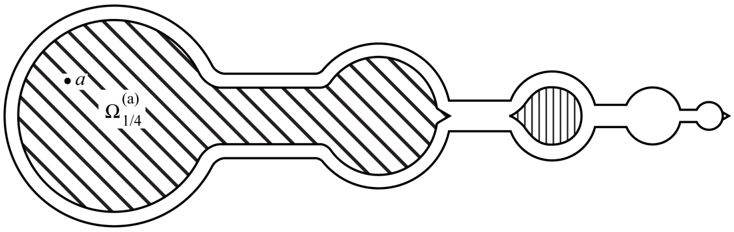

Figure 13.2. *Ouvert connexe dont aucun des $\Omega_{1/n}$ n'est connexe.*
$\Omega_{1/4}^{(a)}$ *est hachurée en biais,* $\Omega_{1/4}$ *est la réunion des deux zones hachurées* $\square$

13.2. Réduction au cas des fonctions

Réduisons la recherche de primitives d'un champ de distributions satisfaisant la **condition de Poincaré**

$$\partial_i q_j = \partial_j q_i$$

à la recherche de primitives d'un champ de fonctions. Ceci servira pour établir les théorèmes d'orthogonalité et de Poincaré pour les distributions (théorèmes 13.5 et 13.7). Nous nommons ce résultat **théorème de réduction au cas des fonctions.**

Théorème 13.2. — *Soit $q \in \mathcal{D}'(\Omega; E^d)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et E est un espace de Neumann, tel que, pour tout i et j dans $[\![1, d]\!]$,*

$$\partial_i q_j = \partial_j q_i.$$

Soit $\eta_n \in \mathcal{C}^\infty_{B(0,1/n)}(\mathbb{R}^d)$ le terme correcteur introduit au théorème 9.17 relatif à $r = 1/n$ et $\Omega_{1/n} = \{x \in \mathbb{R}^d : B(x, 1/n) \subset \Omega\}$. Alors, $q \diamond \eta_n \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_{1/n}; E^d)$.

Supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le champ $q \diamond \eta_n$ a une primitive au sens des distributions ou des fonctions. C'est-à-dire qu'il existe h_n appartenant à $\mathcal{D}'(\Omega_{1/n}; E)$ ou à $\mathcal{C}^1(\Omega_{1/n}; E)$ telle que

$$\nabla h_n = q \diamond \eta_n.$$

Alors, le champ de distributions q a une primitive, c'est-à-dire qu'il existe une distribution $f \in \mathcal{D}'(\Omega; E)$ telle que

$$\nabla f = q. \blacksquare$$

Attention. La pondérée $q \diamond \eta_n$ est régulière, puisque η_n l'est, mais **ce n'est pas une régularisée de** q, c'est-à-dire ce n'est pas une approximation régulière de q, car $(\eta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une suite régularisante. $\square$

La démonstration utilisera la formule de représentation suivante, qui servira également pour établir le théorème de Poincaré pour les distributions.

Théorème 13.3. — *Soit $q \in \mathcal{D}'(\Omega; E^d)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et E est un espace de Neumann, tel que, pour tout i et j dans $[\![1, d]\!]$,*

$$\partial_i q_j = \partial_j q_i.$$

Soit γ_n le potentiel élémentaire localisé et η_n le terme correcteur introduits au théorème 9.17 relatif à $r = 1/n$, où $n \in \mathbb{N}^*$, et $\Omega_{1/n} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^d : B(x, 1/n) \subset \Omega\}$.

Alors,

$$q = q \diamond \eta_n + \nabla k_n \ \text{ dans } \Omega_{1/n},$$

où $k_n \in \mathcal{D}'(\Omega_{1/n}; E)$ est définie par $k_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^d q_i \diamond \partial_i \gamma_n$. $\blacksquare$

Démonstration du théorème 13.3. D'après la formule de représentation (12.1) du théorème 12.1 relative à q_j, on a, dans $\Omega_{1/n}$,

$$q_j = q_j \diamond \eta_n + \sum_{i=1}^d \partial_i q_j \diamond \partial_i \gamma_n.$$

Avec l'hypothèse de Poincaré $\partial_i q_j = \partial_j q_i$, ceci donne

$$q_j = q_j \diamond \eta_n + \sum_{i=1}^d \partial_j q_i \diamond \partial_i \gamma_n.$$

Or, $\partial_j q_i \diamond \partial_i \gamma_n = \partial_j (q_i \diamond \partial_i \gamma_n)$ d'après la première expression de la dérivée d'une pondérée du théorème 7.17, donc il vient, finalement,

$$q_j = q_j \diamond \eta_n + \partial_j \Big(\sum_{i=1}^d q_i \diamond \partial_i \gamma_n \Big).$$

Ce qui est la formule énoncée, par définition de k_n. $\square$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème de réduction au cas des fonctions.

Démonstration du théorème 13.2. Le théorème 12.1 donne $q \diamond \eta_n \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_{1/n}; E^d)$.

S'il existe une distribution, ou *a fortiori* une fonction, h_n telle que

$$\nabla h_n = q \diamond \eta_n,$$

la formule de représentation du théorème 13.3, qui est satisfait grâce à l'hypothèse de Poincaré, donne

$$q = \nabla(h_n + k_n) \ \text{ dans } \Omega_{1/n}.$$

Si ceci a lieu pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le théorème 13.1 de recollement périphérique de primitives donne l'existence de $f \in \mathcal{D}'(\Omega; E)$ telle que

$$\nabla f = q. \ \square$$

13.3. Primitive de distributions : le théorème d'orthogonalité

Avant d'en venir au théorème d'orthogonalité, montrons que tout champ de distributions $q = (q_1, \ldots, q_d)$ «orthogonal» aux champs tests $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_d)$ à divergence nulle vérifie la condition de Poincaré $\partial_i q_j = \partial_j q_i$.

Théorème 13.4. — *Soit $q \in \mathcal{D}'(\Omega; E^d)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et E est un espace de Neumann, tel que*

$$\langle q, \psi \rangle = 0_E, \ \textit{pour tout } \psi \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R}^d) \textit{ tel que } \nabla \cdot \psi = 0. \tag{13.3}$$

Alors, pour tout i et j dans $[\![1, d]\!]$,

$$\partial_i q_j = \partial_j q_i. \ \blacksquare$$

Nous notons $\mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ l'espace des **champs tests**, c'est-à-dire des fonctions indéfiniment dérivables de Ω dans $\mathbb{R}^d$ à support compact. Nous ne le munissons pas d'une topologie.

Et, si q est un champ de distributions, nous notons

$$\langle q, \psi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{d} \langle q_i, \psi_i \rangle.$$

Orthogonalité. En généralisant la notion d'orthogonalité par rapport à un produit scalaire, on peut dire qu'un champ q vérifiant la condition (13.3) est *orthogonal à* l'ensemble

$$\mathcal{D}_{\mathrm{div}}(\Omega;\mathbb{R}^d) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\psi \in \mathcal{D}(\Omega;\mathbb{R}^d) : \nabla\cdot\psi = 0\}$$

par rapport à l'application bilinéaire $\langle\ ,\ \rangle$ de $\mathcal{D}'(\Omega;E^d) \times \mathcal{D}(\Omega;\mathbb{R}^d)$ dans E. □

Démonstration du théorème 13.4. La conclusion étant évidente si $i = j$, supposons-les distincts. Étant donné $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on définit alors $\psi \in \mathcal{D}(\Omega;\mathbb{R}^d)$ par :

$$\psi_i = \partial_j\varphi, \quad \psi_j = -\partial_i\varphi, \quad \psi_k = 0 \text{ sinon (c'est-à-dire si } k \neq i \text{ et } k \neq j).$$

Les dérivées au sens des fonctions commutant d'après le théorème de Schwarz (théorème 1.17),

$$\nabla\cdot\psi = \partial_i(\partial_j\varphi) + \partial_j(-\partial_i\varphi) = 0.$$

L'hypothèse d'orthogonalité (13.3) entraîne donc, avec la définition 5.4 des dérivées d'une distribution,

$$\langle \partial_i q_j - \partial_j q_i, \varphi\rangle = \langle q_i, \partial_j\varphi\rangle + \langle q_j, -\partial_i\varphi\rangle = \langle q, \psi\rangle = 0_E.$$

Ceci pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, donc

$$\partial_i q_j - \partial_j q_i = 0_E. \ \square$$

Montrons que tout champ de distributions q orthogonal aux champs tests à divergence nulle a une primitive f. C'est le **théorème d'orthogonalité**[1] pour les distributions, qui généralise aux valeurs vectorielles le **théorème de dualité de de Rham**.

1. **Historique du théorème d'orthogonalité (théorème 13.5). Valeurs réelles.** Georges de RHAM démontra en 1955 [62, théorème 17', p. 114] qu'un **courant** T est homologue à 0 si et seulement si $T[\psi] = 0$ pour toute forme ψ qui est $\mathcal{C}^\infty$, fermée et à support compact (un courant généralise une forme différentielle sur une variété comme une distribution généralise une fonction ; pour une forme différentielle, ce résultat signifie que *toute forme différentielle fermée est exacte*). C'est le **théorème de dualité de de Rham**.
Jacques-Louis LIONS observa en 1969 [53, p. 69] que le théorème 13.5 à valeurs réelles en résulte en considérant le courant $T = q_1 \mathrm{d}x_1 + \cdots + q_n \mathrm{d}x_n$ (le passage des formes différentielles aux primitives est bien expliqué, pour les fonctions, dans [RUDIN, 65, § 10.42 et 10.43, p. 262–264]). Compte tenu de l'importance de ce résultat pour la résolution des équations de Navier–Stokes, de nombreuses démonstrations plus directes et élémentaires furent données pour des distributions à valeurs réelles particulières : par Olga LADYZHENSKAYA en 1963 [47, théorème 1, p. 28] pour $q \in (L^2(\Omega))^d$; par Luc TARTAR en 1978 [88] pour $q \in (H^{-1}(\Omega))^d$; par Jacques SIMON en 1993 [76] pour $q \in (\mathcal{D}'(\Omega))^d$.

Valeurs vectorielles. Jacques SIMON démontra le théorème 13.5 pour un espace E de Banach en 1993 [77, théorème 5 (ii), p. 4] (ou [78, théorème 13 p. 210], quand Ω est lipschitzien), grâce à une méthode constructive (la démonstration de Georges DE RHAM [62] ne semble pas s'étendre à ce cas, car elle utilise des propriétés de réflexivité d'espaces de courants). La généralisation à E espace de Neumann, nouvelle, reprend la méthode de [77].

Théorème 13.5. — *Soit $q \in \mathcal{D}'(\Omega; E^d)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et E est un espace de Neumann, tel que :*

$$\langle q, \psi \rangle = 0_E, \text{ pour tout } \psi \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R}^d) \text{ tel que } \nabla \cdot \psi = 0. \tag{13.4}$$

Alors, il existe $f \in \mathcal{D}'(\Omega, E)$ telle que

$$\nabla f = q. \ ▮$$

Formulation détaillée du théorème 13.5. Autrement dit, si des éléments $q_1, \ldots, q_d$ de $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ vérifient

$$\sum_{i=1}^{d} \langle q_i, \varphi_i \rangle = 0_E, \text{ pour toutes les } \varphi_1, \ldots, \varphi_d \text{ de } \mathcal{D}(\Omega) \text{ telles que } \sum_{i=1}^{d} \partial_i \varphi_i = 0,$$

alors il existe $f \in \mathcal{D}'(\Omega; E)$ telle que

$$\partial_i f = q_i, \text{ pour tout } i \in [\![1, d]\!]. \ \square$$

Optimalité du théorème 13.5. La condition d'orthogonalité (13.4) est nécessaire et suffisante pour que q ait une primitive, car, si $q = \nabla f$, alors, pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ tel que $\nabla \cdot \psi = 0$,

$$\langle q, \psi \rangle = \sum_{i=1}^{d} \langle \partial_i f, \psi_i \rangle = -\sum_{i=1}^{d} \langle f, \partial_i \psi_i \rangle = -\langle f, \nabla \cdot \psi \rangle = 0_E. \tag{13.5}$$

$\square$

Formulation en termes d'orthogonalité. Le théorème 13.5 et sa réciproque que l'on vient de voir peuvent être exprimés sous la forme

$$\mathcal{D}'_\nabla(\Omega; E^d) = (\mathcal{D}_{\mathrm{div}}(\Omega; \mathbb{R}^d))^\perp,$$

où $\mathcal{D}'_\nabla(\Omega; E^d)$ désigne l'ensemble des champs de distributions qui sont des gradients, $\mathcal{D}_{\mathrm{div}}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ désigne l'ensemble des champs tests à divergence nulle, et $\perp$ est l'orthogonalité relative à l'application bilinéaire $\langle \ , \ \rangle$ de $\mathcal{D}'(\Omega; E^d) \times \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ dans E. $\square$

Démonstration du théorème 13.5. ***1º** Réduction au cas des fonctions.* D'après le théorème 13.2 de réduction au cas des fonctions, il suffit de vérifier deux conditions :
— La première est la condition de Poincaré $\partial_i q_j = \partial_j q_i$, qui résulte de l'hypothèse d'orthogonalité (13.4) d'après le théorème 13.4.
— La seconde, qui reste à vérifier, est l'existence d'une primitive du champ de fonctions $q \diamond \eta_n$, c'est-à-dire de $h_n \in \mathcal{C}^1(\Omega_{1/n}; E)$ telle que

$$\nabla h_n = q \diamond \eta_n, \tag{13.6}$$

où $\eta_n \in \mathcal{C}^\infty_{B(0,1/n)}(\mathbb{R}^d)$ est le terme correcteur introduit au théorème 9.17 relatif à $r = 1/n$ et $\Omega_{1/n} = \{x \in \mathbb{R}^d : B(x, 1/n) \subset \Omega\}$.

***2º** Obtention d'une fonction h_n vérifiant (13.6).* D'après le théorème d'orthogonalité pour les fonctions (théorème 11.4), il suffit pour cela de vérifier que le champ $q \diamond \eta_n$ est orthogonal aux champs tests à divergence nulle. Soit donc

$$\psi \in \mathcal{D}(\Omega_{1/n}; \mathbb{R}^d) \text{ tel que } \nabla \cdot \psi = 0.$$

Par définition 7.12 de la pondération,

$$\langle q \diamond \eta_n, \psi\rangle_{\Omega_{1/n}} = \sum_{i=1}^{d} \langle q_i \diamond \eta_n, \psi_i\rangle_{\Omega_{1/n}} = \sum_{i=1}^{d} \langle q_i, \eta_n \diamond \check{\psi}_i\rangle_{\Omega} = \langle q, \eta_n \diamond \check{\psi}\rangle_{\Omega}, \quad (13.7)$$

où $\check{\psi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$ est défini par

$$\check{\psi}(x) = \psi(-x) \text{ si } -x \in \Omega_{1/n}, \quad \check{\psi}(x) = 0 \text{ sinon.}$$

Or, d'après l'égalité $\partial_i(g \diamond \mu) = -g \diamond \partial_i \mu$ du théorème 7.17,

$$\nabla \cdot (\eta_n \diamond \check{\psi}) = \sum_{i=1}^{d} \partial_i(\eta_n \diamond \check{\psi}_i) = -\sum_{i=1}^{d} \eta_n \diamond \partial_i \check{\psi}_i = -\eta_n \diamond (\nabla \cdot \check{\psi}).$$

Puisque $\nabla \cdot \psi = 0$, on a $\nabla \cdot \check{\psi} = -(\nabla \cdot \psi)\check{} = 0$, donc

$$\nabla \cdot (\eta_n \diamond \check{\psi}) = 0.$$

L'hypothèse d'orthogonalité (13.4) donne alors $\langle q, \eta_n \diamond \check{\psi}\rangle_{\Omega} = 0_E$, c'est-à-dire, avec (13.7),

$$\langle q \diamond \eta_n, \psi\rangle_{\Omega_{1/n}} = 0_E.$$

Puisque $q \diamond \eta_n$ est (théorème 13.2) un champ continu, ceci s'écrit (théorème 3.9)

$$\int_{\Omega_{1/n}} q \diamond \eta_n \cdot \psi = 0_E.$$

C'est la condition d'orthogonalité pour les fonctions (11.4) du théorème 11.4 que l'on cherchait. Ledit théorème fournit donc une primitive $h_n \in \mathcal{C}^1(\Omega_{1/n}; E)$ de $q \diamond \rho_n$.

3º Conclusion. La condition (13.6) étant ainsi satisfaite, on peut appliquer le théorème 13.2 de réduction au cas des fonctions, qui fournit une primitive f de q. $\square$

Montrons que, en dimension un, toute distribution q a une primitive[2].

Théorème 13.6. — *Soit $q \in \mathcal{D}'(\Omega; E)$, où est Ω un ouvert de $\mathbb{R}$ et E est un espace de Neumann. Alors, il existe $f \in \mathcal{D}'(\Omega, E)$ telle que*

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = q. \; \blacksquare$$

2. **Historique du théorème 13.6.** Laurent SCHWARTZ démontra en 1950 [68, chap. II, § 4, théorème I, p. 51] que toute distribution de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ a une primitive, unique à une constante près.

Démonstration. D'après le théorème d'orthogonalité (théorème 13.5), il suffit de vérifier que $\langle q, \psi \rangle$ s'annule pour toute fonction $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\nabla \cdot \psi = 0$, c'est-à-dire ici $\psi' = 0$.

C'est le cas, car une telle fonction ψ est nulle, puisqu'elle est constante (par exemple d'après le théorème 12.3) et nulle en dehors d'un compact (par définition de $\mathcal{D}(\Omega)$). $\square$

13.4. Primitive de distributions dans un ouvert simplement connexe

Montrons que tout champ de distributions $q = (q_1, \dots, q_d)$ dans un ouvert simplement connexe qui vérifie la condition de Poincaré $\partial_i q_j = \partial_j q_i$ a une primitive. C'est le **théorème de Poincaré**[3], généralisé aux distributions.

Théorème 13.7. — *Soit $q \in \mathcal{D}'(\Omega; E^d)$, où E est un espace de Neumann et*

$$\Omega \textit{ est un ouvert simplement connexe de } \mathbb{R}^d,$$

tel que, pour tout i et j dans $[\![1, d]\!]$,

$$\partial_i q_j = \partial_j q_i.$$

Alors, il existe $f \in \mathcal{D}'(\Omega; E)$ telle que

$$\nabla f = q. \blacksquare$$

Optimalité du théorème 13.7. La condition $\partial_i q_j = \partial_j q_i$ est nécessaire pour qu'un champ q ait une primitive, car, si $q = \nabla f$, alors, puisque les dérivées commutent (théorème 5.7),

$$\partial_i q_j = \partial_i \partial_j f = \partial_j \partial_i f = \partial_j q_i. \tag{13.8}$$

Quand Ω est simplement connexe, elle est donc nécessaire et suffisante.

Pour un ouvert Ω quelconque, elle est nécessaire mais pas toujours suffisante : un exemple de champ vérifiant $\partial_i q_j = \partial_j q_i$ dans une couronne, mais qui n'a pas de primitive, est donné au théorème 13.10 en dimension $d = 2$ et au théorème 13.11 pour $d \geq 3$. $\square$

---

3. **Historique du théorème de Poincaré. Pour les fonctions réelles.** C'est le théorème 11.5, qui a été établi par Henri POINCARÉ, en 1899 [60, p. 10].

Généralisation aux distributions. Laurent SCHWARTZ démontra en 1950 [68, chap. II, § 6, théorème VI, p. 59] le théorème 13.7 pour les distributions de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$. Il avait énoncé ce résultat en dimension 2 en 1945 [67, p. 64]. Sa méthode, qui utilise une itération sur la dimension d, ne semble pas s'étendre au cas d'un ouvert simplement connexe.

Généralisation aux valeurs vectorielles. Jacques SIMON démontra en 1993 [77, théorème 5, p. 4] le théorème 13.7 pour un espace E de Banach, grâce à une méthode constructive. La généralisation à E espace de Neumann, nouvelle, suit la méthode de [77].

Démonstration du théorème 13.7. D'après le théorème 13.2 de réduction au cas des fonctions, il suffit, puisque la condition de Poincaré $\partial_i q_j = \partial_j q_i$ est ici satisfaite par hypothèse, de vérifier que le champ de fonctions $q \diamond \eta_n$ a une primitive. C'est-à-dire, qu'il existe $h_n \in \mathcal{C}^1(\Omega_{1/n}; E)$ telle que

$$\nabla h_n = q \diamond \eta_n, \tag{13.9}$$

où $\eta_n \in \mathcal{C}^\infty_{B(0,1/n)}(\mathbb{R}^d)$ est le terme correcteur donné par le théorème 9.17 (b) relatif à $r = 1/n$ et $\Omega_{1/n} = \{x \in \mathbb{R}^d : B(x, 1/n) \subset \Omega\}$. Faisons-le en quatre étapes.

1º *Primitive locale.* D'après l'égalité $\partial_i(g \diamond \mu) = \partial_i g \diamond \mu$ du théorème 7.17 et l'hypothèse $\partial_i q_j = \partial_j q_i$,

$$\partial_i(q_j \diamond \eta_n) = \partial_i q_j \diamond \eta_n = \partial_j q_i \diamond \eta_n = \partial_j(q_i \diamond \eta_n).$$

Le champ de fonctions $q \diamond \eta_n$, vérifiant ainsi l'hypothèse de Poincaré, a une primitive locale d'après le théorème de Poincaré pour les fonctions (théorème 11.5). C'est-à-dire que, pour toute boule ouverte B incluse dans $\Omega_{1/n}$, il existe $h_B \in \mathcal{C}^1(B; E)$ telle que

$$\nabla h_B = q \diamond \eta_n \;\text{ dans } B. \tag{13.10}$$

2º *Invariance de la circulation : un cas facile.* Soit Γ un lacet de $\Omega_{1/n}$. Puisque Ω est simplement connexe (définition 10.22), Γ est homotope (définition 10.18) dans Ω à un lacet Γ_* réduit à un point. Si cette homotopie H a lieu dans $\Omega_{1/n}$, c'est-à-dire si son image $[H]$ (définition 10.18) vérifie

$$[H] \subset \Omega_{1/n},$$

le théorème 10.19 d'invariance par homotopie de la circulation d'un gradient local donne, puisque la circulation sur un chemin réduit à un point est nulle (théorème 10.5),

$$\int_\Gamma q \diamond \eta_n \cdot \mathrm{d}\ell = \int_{\Gamma_*} q \diamond \eta_n \cdot \mathrm{d}\ell = 0_E. \tag{13.11}$$

Mais $[H]$ n'appartient pas nécessairement à $\Omega_{1/n}$. Démontrons donc (13.11) sans cette hypothèse.

3º *Invariance de la circulation lorsque* $[H] \not\subset \Omega_{1/n}$. L'image $[H]$ étant compacte (comme image du compact $[t_\mathrm{o}, t_\mathrm{e}] \times [0, 1]$ par l'application continue H, voir le théorème A.31) et les $\Omega_{1/n}$ recouvrant Ω, il existe $m \geq n$ tel que

$$[H] \subset \Omega_{1/m}.$$

Le théorème 10.19 donne alors, au lieu de (13.11),

$$\int_\Gamma q \diamond \eta_m \cdot \mathrm{d}\ell = 0_E. \tag{13.12}$$

D'autre part, d'après la formule de représentation du théorème 13.3, pour tout n,

$$q = q \diamond \eta_n + \nabla k_n \quad \text{dans } \Omega_{1/n},$$

où $k_n \in \mathcal{D}'(\Omega_{1/n}; E)$. En soustrayant la formule relative à m de celle relative à n, il vient, puisque $\Omega_{1/m}$ contient $\Omega_{1/n}$,

$$q \diamond (\eta_n - \eta_m) = \nabla(k_n - k_m) \quad \text{dans } \Omega_{1/n}.$$

Puisque $q \diamond \eta_n$ et $q \diamond \eta_m$ sont des champs réguliers (théorème 13.2), $\nabla(k_n - k_m)$ est continu donc, d'après le théorème 12.4,

$$k_n - k_m \in \mathcal{C}^1(\Omega_{1/n}; E).$$

La circulation sur un lacet du gradient d'un champ $\mathcal{C}^1$ étant nulle (théorème 10.8),

$$\oint_\Gamma q \diamond (\eta_n - \eta_m) \cdot \mathrm{d}\ell = 0_E.$$

D'où, avec (13.12),

$$\oint_\Gamma q \diamond \eta_n \cdot \mathrm{d}\ell = 0_E.$$

***4º** Conclusion.* Sa circulation étant ainsi nulle sur tout lacet Γ de $\Omega_{1/n}$, la fonction $q \diamond \eta_n$ a une primitive d'après le théorème 11.1, ce qui établit (13.9) et termine ainsi la démonstration du théorème 13.7. □

Un cas simple. Si tous les $\Omega_{1/n}$ sont simplement connexes, la première étape de la démonstration du théorème 13.7 suffit, car alors (13.10) entraîne (13.9) d'après le théorème de recollement de primitives locales de champs continus dans un ouvert simplement connexe établi au volume 2 [81, théorème 9.4].

C'est le cas si Ω est étoilé ou, plus généralement s'il est rétractile, c'est-à-dire s'il est homotope « dans lui-même » à un de ses points. Mais $\Omega_{1/n}$ n'est pas nécessairement simplement connexe, comme le montrent les exemples suivants. □

Ouverts simplements connexes dont des parties $\Omega_{1/n}$ ne sont pas simplement connexes. Donnons deux exemples de tels ouverts.

Exemple 1 : un des $\Omega_{1/n}$ n'est pas simplement connexe. Un tore ayant un petit rayon égal à 1 complété par une plaque d'épaisseur $1/2$, c'est-à-dire le domaine Ω de $\mathbb{R}^3$ engendré par la rotation, autour de son axe de symétrie vertical, de l'« haltère » de $\mathbb{R}^2$ représentée sur la figure 13.1, p. 266, est simplement connexe, car les lacets du tore se rétractent par la plaque. En revanche, $\Omega^{(a)}_{1/2}$ n'est pas simplement connexe, car sa plaque a disparu. Mais $\Omega^{(a)}_{1/3}$ et les suivants sont simplement connexes.

Exemple 2 : aucun des $\Omega_{1/n}$ n'est simplement connexe. Le domaine Ω de $\mathbb{R}^3$ engendré par la rotation, autour de l'axe vertical de son plus gros disque, du domaine ω de $\mathbb{R}^2$ représenté sur la figure 13.2 (suite de disques reliés par des bandes), p. 268, est simplement connexe. Mais aucun des $\Omega_{1/n}$ ne l'est, puisque, comme on l'a vu p. 268, $\omega_{1/n}$ a toujours deux composantes connexes, et la rotation de celle qui n'est pas connectée au gros disque engendre un tore. □

13.5. Courant d'un champ incompressible en dimension deux

Montrons que, dans un ouvert simplement connexe de $\mathbb{R}^2$, tout champ de distributions $v = (v_1, v_2)$ à divergence nulle dérive d'une «fonction de courant», qui est ici une distribution. C'est le **lemme de Haar**[4], généralisé aux distributions.

Théorème 13.8. — *Soit $v \in \mathcal{D}'(\Omega; E^2)$, où Ω est un ouvert simplement connexe de $\mathbb{R}^2$ et E est un espace de Neumann, tel que*

$$\partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 = 0.$$

*Alors, il existe une «**fonction de courant**» $f \in \mathcal{D}'(\Omega; E)$ telle que*

$$v_1 = \partial_2 f, \quad v_2 = -\partial_1 f. \tag{13.13}$$

∎

Démonstration. Considérons le champ $q \in \mathcal{D}'(\Omega; E^2)$ donné par

$$q \stackrel{\text{def}}{=} (-v_2, v_1). \tag{13.14}$$

Il vérifie la condition de Poincaré, qui se réduit ici à $\partial_1 q_2 = \partial_2 q_1$, puisque

$$\partial_1 q_2 - \partial_2 q_1 = \partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 = 0.$$

Donc, d'après le théorème de Poincaré généralisé (théorème 13.7), il existe une distribution f telle que

$$\partial_1 f = q_1 = -v_2, \quad \partial_2 f = q_2 = v_1. \ \square$$

Définition précise de q. La définition (13.14) est volontairement abusive, pour gagner en clarté. En effet, son membre de gauche, q, appartient à $\mathcal{D}'(\Omega; E^2)$, tandis que son membre de droite, $(-v_2, v_1)$, appartient à $(\mathcal{D}'(\Omega; E))^2$, puisque v_1 et v_2 appartiennent à $\mathcal{D}'(\Omega; E)$.

Pour être plus précis, il faudrait remplacer (13.14) par :

q est le champ de $\mathcal{D}'(\Omega; E^2)$ ayant pour composantes $q_1 = -v_2$ et $q_2 = v_1$.

C'est-à-dire que q est l'image de $(-v_2, v_1)$ par l'isomorphisme de $(\mathcal{D}'(\Omega; E))^2$ sur $\mathcal{D}'(\Omega; E^2)$ obtenu au théorème 5.3.

En termes parfaitement rigoureux (mais encore moins clairs !), q est défini, pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, par

$$\langle q, \varphi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} (-(\langle v, \varphi \rangle)_2, (\langle v, \varphi \rangle)_1). \ \square$$

4. **Historique du lemme de Haar.** Alfréd HAAR démontra l'existence d'une fonction de courant d'un champ $v \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ à divergence nulle entre 1926 [37] et 1929 [38].

Formulation abrégée du théorème 13.8. En notant $^\perp$ la rotation de $\pi/2$ dans le sens direct, et donc

$$\nabla^\perp \overset{\text{def}}{=} (\partial_2, -\partial_1),$$

ce résultat s'exprime ainsi :

$$\textit{si } \Omega \textit{ est simplement connexe et } \nabla \cdot v = 0, \textit{ alors il existe } f \textit{ telle que } v = \nabla^\perp f. \tag{13.15}$$

Observons que

$$\Delta f = \nabla^\perp \cdot \nabla^\perp f = \nabla^\perp \cdot v = \partial_2 v_1 - \partial_1 v_2. \ \square$$

Unicité. La distribution f obtenue au théorème 13.8 est unique à une constante additive près sur chaque composante connexe de Ω, d'après le théorème 12.3. En particulier, si Ω est connexe, elle est unique à une constante additive près. $\square$

Courant *versus* fonction de courant. Ces deux concepts n'ont rien à voir. En effet :
— Un *courant* généralise une forme différentielle comme une distribution généralise une fonction, voir la note 1, p. 271.
— Une *fonction de courant* est une fonction (ou une distribution) scalaire dont dérive un champ bidimensionnel incompressible, par la relation (13.13). $\square$

13.6. Champs ayant des primitives locales mais pas de primitive globale

Observons d'abord que, dans un ouvert simplement connexe, si un champ a des primitives locales, il a une primitive globale. Nous nommons ce résultat **théorème de recollement de primitives locales**[5].

Théorème 13.9. — *Soit $q \in \mathcal{D}'(\Omega; E^d)$, où E un espace de Neumann et*

$$\Omega \textit{ est un ouvert simplement connexe de } \mathbb{R}^d,$$

tel que, pour toute boule ouverte $B \Subset \Omega$, il existe $f_B \in \mathcal{D}'(B; E)$ telle que

$$\nabla f_B = q \ \textit{ dans } B.$$

Alors, il existe $f \in \mathcal{D}'(\Omega; E)$ telle que

$$\nabla f = q. \ \blacksquare$$

Démonstration. Les dérivées partielles commutant (théorème 5.7), l'hypothèse $\nabla f_B = q$ entraîne, pour tout i et j, dans B,

$$\partial_i q_j = \partial_i \partial_j f_B = \partial_j \partial_i f_B = \partial_j q_i. \tag{13.16}$$

5. **Historique du théorème de recollement de primitives locales.** Ce résultat, simple, ne nous semble pas avoir été déjà énoncé pour les distributions.

Cette égalité étant vraie dans chaque boule B, est vraie dans leur réunion Ω d'après le théorème de recollement des égalités (théorème 6.10), c'est-à-dire, pour tout i et j,

$$\partial_i q_j = \partial_j q_i \text{ dans } \Omega.$$

Le théorème de Poincaré généralisé (théorème 13.7) fournit alors une distribution f telle que

$$\nabla f = q \text{ dans } \Omega. \ \square$$

Généralisation. On peut, dans le théorème 13.9, remplacer « toute boule ouverte $B \Subset \Omega$ » par :

« pour chaque $x \in \Omega$, pour au moins une boule ouverte B centrée en x ». $\square$

Recollement de primitives locales *versus* recollement périphérique. Le théorème 13.9 est complémentaire du *théorème de recollement périphérique de primitives* (théorème 13.1), dans lequel on ne recolle qu'à la périphérie du domaine des primitives qui sont données dans Ω privé d'un voisinage arbitrairement petit de sa frontière, mais ceci pour un ouvert Ω quelconque, pas nécessairement simplement connexe. $\square$

Montrons maintenant qu'il existe des ouverts dans lesquels l'existence de primitives locales n'assure pas l'existence d'une primitive globale. Commençons par un exemple en dimension $d = 2$, à valeurs réelles.

Théorème 13.10. — *Soit $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| > 1\}$ et $q \in \mathcal{C}^\infty(\Omega; \mathbb{R}^2)$ le champ défini, pour tout $x \in \Omega$, par*

$$q(x) = \Big(-\frac{x_2}{|x|^2}, \frac{x_1}{|x|^2}\Big).$$

Pour toute boule B incluse dans Ω, il existe $f_B \in \mathcal{C}^\infty(B)$ telle que $\nabla f_B = q$ dans B, et pourtant il n'existe aucune distribution $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ telle que $\nabla f = q$ dans tout Ω. ▮

Démonstration du théorème 13.10. En coordonnées polaires, $\nabla = e_r \partial_r + (e_\theta / r)\partial_\theta$ et $q(\theta, r) = e_\theta / r$, donc

$$\nabla \theta = q \text{ excepté en } \theta = 0. \tag{13.17}$$

En effet, θ est discontinu sur la demi-droite $D = \{(r, \theta) : \theta = 0\}$: il vaut 0 d'un côté, 2π de l'autre.

Le champ q n'a pas de primitive, sinon celle-ci serait une fonction continue comme toute distribution à dérivées continues (théorème 12.4) et sa restriction à $\Omega \setminus D$ serait de la forme $\theta + c$ d'après le théorème 12.3, ce qui est contradictoire.

Pourtant $\nabla \theta = q$ dans toute boule B, car q est également un gradient dans les boules rencontrant D, comme on peut le vérifier en choisissant une autre demi-droite pour origine des θ. $\square$

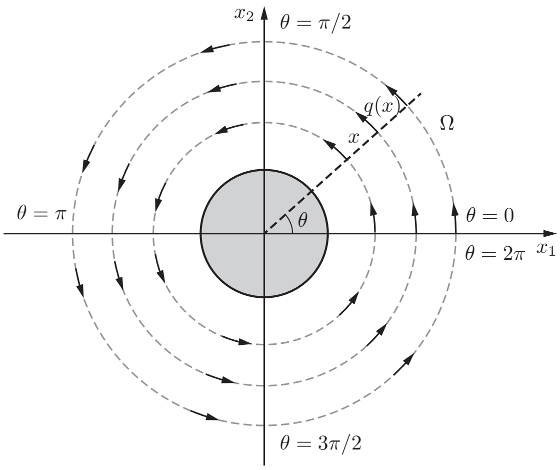

Figure 13.3. *Champ q ayant θ pour primitive locale mais pas globale. Ω est l'extérieur du disque grisé*

Montrons qu'il existe de tels ouverts en toute dimension supérieure à deux.

Théorème 13.11. — *Si $d \geq 2$ et E est un espace de Neumann non réduit à $\{0_E\}$, il existe un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ et un champ $q \in \mathcal{C}^\infty(\Omega; E^d)$ tels que :*
— *pour toute boule B incluse dans Ω, il existe une fonction $f_B \in \mathcal{C}^\infty(B; E)$ telle que $\nabla f_B = q$ dans B ;*
— *il n'existe aucune distribution $f \in \mathcal{D}'(\Omega; E)$ telle que $\nabla f = q$ dans tout Ω.* ▮

Démonstration. Soit $\underline{\Omega}$ l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\underline{q}$ le champ de $\mathcal{C}^\infty(\underline{\Omega}; \mathbb{R}^2)$ donnés au théorème 13.10, $\underline{f}_B$ une primitive de $\underline{q}$ dans B, et $u \in E$, $u \neq 0_E$.

En dimension $d = 2$, le champ défini dans $\underline{\Omega}$ par $q(x) = \underline{q}(x)\, u$ convient, car :
— la fonction définie par $f_B(x) = \underline{f}_B(x)\, u$ est une primitive de q dans B ;
— le champ q n'a pas de primitive globale f, sinon celle-ci serait une fonction continue comme toute distribution à dérivées continues (théorème 12.4) ; et, pour $\theta \neq 0$, puisque $\nabla(\theta u) = q$ d'après (13.17), elle serait de la forme $f = \theta u + c$ où $c \in E$ (d'après le théorème 12.3), ce qui contredirait sa continuité sur la demi-droite $\theta = 0$.

En dimension supérieure, un champ q qui convient dans $\underline{\Omega} \times \mathbb{R}^{d-2}$ est défini par

$$q(x_1, \ldots, x_d) = (\underline{q}_1(x_1, x_2), \underline{q}_2(x_1, x_2), 0, \ldots, 0)\, u. \ \square$$

Nécessité de la simple connexité pour le recollement de primitives locales. La simple connexité est suffisante pour que tout champ ayant des primitives locales ait une primitive globale, d'après le théorème de recollement de primitives locales (théorème 13.9), et donc pour qu'un champ vérifiant la condition de Poincaré $\partial_i q_j = \partial_j q_i$ ait une primitive. Elle est nécessaire si $d = 1$ ou 2, mais elle ne l'est plus si $d \geq 3$, bien qu'elle le soit pour $d = 3$ quand on impose une certaine régularité à l'ouvert.

Ces résultats, qui m'ont été communiqués par Pierre DREYFUSS et Nicolas DEPAUW, font appel à des considérations difficiles de topologie algébrique présentées dans [DREYFUSS, 27]. Donnons-en un aperçu.

Le cas $d = 1$. Tout ouvert de $\mathbb{R}$ est simplement connexe, et a donc la propriété de recollement de primitives locales.

Le cas $d = 2$. Tout ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ non simplement connexe présente au moins un *trou*, c'est-à-dire qu'il existe un point $z \notin \Omega$ qui est entouré par un lacet Γ de Ω. Il n'a donc pas la propriété de recollement de primitives locales, car le champ q introduit au théorème 13.10, une fois translaté pour que z en soit l'origine, est localement un gradient dans Ω, mais ne l'est pas globalement.

Le cas $d = 3$. L'extérieur de la *sphère cornue d'Alexander* (celle-ci est représentée et étudiée p. 171 de [HATCHER, 39]) possède la propriété de recollement de primitives locales, pourtant il n'est pas simplement connexe.

En revanche, pour un ouvert de $\mathbb{R}^3$ borné et localement d'un côté du graphe d'une fonction continue, la propriété de recollement de primitives locales entraîne la simple connexité.

Le cas $d \geq 4$. La propriété de recollement de primitives locales d'un ouvert de $\mathbb{R}^d$ n'entraîne pas sa simple connexité, même pour un ouvert borné et localement d'un côté du graphe d'une fonction continue. $\square$

13.7. Comparaison des conditions d'existence d'une primitive

Comparons les conditions utilisées dans les sections précédentes pour obtenir l'existence d'une primitive[6].

Théorème 13.12. — *Soit $q \in \mathcal{D}'(\Omega; E^d)$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et E est un espace de Neumann. Alors :*

(a) $q \in \mathcal{D}'_\nabla(\Omega; E^d) \quad \Leftrightarrow \quad \exists f \in \mathcal{D}'(\Omega; E)$ *telle que* $\nabla f = q$

$\Leftrightarrow \quad \langle q, \psi \rangle = 0_E, \ \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R}^d)$ *tel que* $\nabla \cdot \psi = 0.$

(b) $q \in \mathcal{D}'_\nabla(\Omega; E^d) \quad \Rightarrow \quad \partial_i q_j = \partial_j q_i, \forall i, \ \forall j.$

(c) $\partial_i q_j = \partial_j q_i, \ \forall i, \ \forall j \quad \Leftrightarrow \quad \forall$ *boule* $B \Subset \Omega, \ \exists f_B \in \mathcal{D}'(B; E), \ \nabla f_B = q$ *dans* $B.$

6. **Historique du théorème 13.12.** On se reportera aux notes 1, p. 271, et 3, p. 274, pour l'historique des parties directes, et en particulier pour les contributions de Georges DE RHAM et Laurent SCHWARTZ.

(d) *Si Ω est simplement connexe :*

$$\begin{aligned} q \in \mathcal{D}'_{\nabla}(\Omega; E^d) \ &\Leftrightarrow \ \exists f \in \mathcal{D}'(\Omega; E) \text{ telle que } \nabla f = q \\ &\Leftrightarrow \ \langle q, \psi \rangle = 0_E, \ \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R}^d) \text{ tel que } \nabla \cdot \psi = 0 \\ &\Leftrightarrow \ \partial_i q_j = \partial_j q_i, \ \forall i, \ \forall j \\ &\Leftrightarrow \ \forall \text{ boule } B \Subset \Omega, \ \exists f_B \in \mathcal{D}'(B; E) \text{ t.q. } \nabla f_B = q \text{ dans } B. \end{aligned}$$

(e) *Quand $d \geq 2$, il existe Ω tel que :*

$$\partial_i q_j = \partial_j q_i, \forall i, \forall j \quad \not\Rightarrow \quad q \in \mathcal{D}'_{\nabla}(\Omega; E^d). \ ▮$$

Démonstration. ***1º*** *Équivalences (a).* La première équivalence est la définition 12.5 de $\mathcal{D}'_{\nabla}(\Omega; E^d)$.

La partie directe de la seconde équivalence est donnée par l'égalité (13.5), p. 272, la réciproque est le théorème d'orthogonalité (théorème 13.5).

2º *Implication (b).* Cette implication est donné par l'égalité (13.8), p. 274.

3º *Équivalence (c).* La partie directe est donnée par le théorème de Poincaré (théorème 13.7), puisque toute boule est simplement connexe. La réciproque résulte de l'égalité (13.16), p. 278.

4º *Équivalences (d).* Ces équivalences résultent des équivalences (a) et (c), et de ce que, si Ω est simplement connexe, tout gradient local est un gradient d'après le théorème de recollement de primitives locales (théorème 13.9), et, évidemment, réciproquement.

5º *Propriété (e).* Un tel Ω est donné par le théorème 13.11, compte tenu de l'équivalence (c). □

Chapitre 14

Bibliographie

[1] AGMON, S., DOUGLIS, A. et NIRENBERG, L., Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, I. *Comm. Pure Appl. Math*, 12 (1959), 623–727.

[2] BERNOULLI, J. (Jacob), Analysis problematis antehac propositi. De Inventione Lineæ descendus a corpore gravi percurrendæ uniformiter. *Opera*, 421–426. Cramer et Philibert, Genève, 1744.

[3] BERNOULLI, J. (Johann), Lectiones matematicæ de methodo integralium allisque (1691–1692). *Opera omnia* III, 385–559. Éd. originale Bousquet, Lausanne et Genève, 1742 (= Olms, Hildesheim, 1968).

[4] BOCHNER, S., *Vorlesungen über Fouriersche Integrale*, Leipzig, Akad. Verlagsgesellschaft, 1932.

[5] BOCHNER, S., Integration von Funktionen deren Werte die Elemente eines Vektorraumes sind, *Fundamenta Mat.* 20 (1933), 262–276.

[6] BOLZANO, B., Ein Analytischer Beweis der Lehrsatzes, daß zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetzes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege, *Abhandlungen K. Böhm. Gesell. Wissen.*, (3), 5 (1817), 1–6 (= en français, *Revue Hist. Sci.*, 17 (1964), 136–164).

[7] BOREL, E., Sur quelques points de la théorie des fonctions, *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*, sér. 3, 12 (1895), 9–55 (= Thèse, Paris, 1894).

[8] BOURBAKI, N., Sur certains espaces vectoriels topologiques. *Ann. Inst. Fourier Grenoble*, 2 (1950), 5–16.

[9] BOURBAKI, N., *Intégration*, Hermann, 1965.

[10] BOURBAKI, N., *Espaces vectoriels topologiques*, Hermann, nouvelle édition, 1967.

[11] BOURBAKI, N., *Fonction d'une variable réelle*, Hermann, nouvelle édition, 1976.

[12] BOURBAKI, N., *Éléments d'histoire des mathématiques*, Hermann, nouvelle édition, 1974.

[13] BOURBAKI, N., *Variétés différentielles et analytiques : fascicule de résultats*, Hermann, 1971.

[14] CAJORI, F., *A history of mathematical notations*, deux tomes, Open Court (Chicago), 1974.

[15] CANTOR, G., *Gesammelte Abhandlungen*, Springer, 1932.

[16] CARTAN, E., *Œuvres complètes*, 6 volumes, Gauthiers–Villars, 1953–1955.

[17] CARTAN, H., *Cours de calcul différentiel*, Hermann, édition refondue, 1977.

[18] CAUCHY, A., *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique*, Debure (Paris), 1821.

[19] CAUCHY, A., *Résumé des leçons données à l'École Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal*, Debure (Paris), 1823.

[20] CAUCHY, A., *Mémoire sur les intégrales définies*, Bures frères, Paris, 1825.

[21] CLIFFORD, W. K., *Elements of dynamic*, (1878).

[22] CONDORCET, N., *Mémoire sur les équations aux différence partielles*, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, année 1770, Paris, 1773.

[23] CORIOLIS, G.-G., *Du calcul de l'effet des machines, ou considérations sur l'emploi des moteurs et sur leur évaluation, pour servir d'introduction à l'étude spéciale des machines*, Paris, Carilian–Gœury, Libraire des corps royaux des ponts et chaussées et des mines, 1829.

[24] D'ALEMBERT, J., *Réflexions sur la cause générale des vents*, David, Paris, 1747.

[25] DIEUDONNÉ, J., Sur les fonctions continues numériques définies dans un produit de deux espaces compacts *C. R. Acad. Sci., Paris*, 205, 593-595 (1937).

[26] DIRAC, P.A.M., The physical interpretation of the quantum dynamics, *Proc. Royal. Soc.*, London, A, 113 (1926), 621–641.

[27] DREYFUSS, P., *Formes différentielles exactes et fermées dans* $\mathbb{R}^d$, Université côte d'Azur.

[28] DU BOIS-REYMOND, P., Fortsetzung der Erläuterungen zu den Anfangsgründen der Variationsrechnung, *Mathematische Annalen*, 15, no 2(1879), 564–576.

[29] DUGUNDJI, J., *Topology*, Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1966.

[30] EDWARDS, R., *Functional analysis*, Winston, 1965.

[31] EUCLIDE, *Elementorum Libri* XV, Apud Hieronymum de Marnef & Gulilmum Canellat, Paris, 1573 (= *Les œuvres d'Euclide*, trad. F. Peyrard (1819), A. Blanchard, Paris, 1966).

[32] EULER, L., *Institutiones calculi differentialis*, Mémoires de l'Académie de Berlin, 1755.

[33] EULER, L., *Institutionum calculi integralis, Volumen Primum*, Acad. Imper. Sci. Petropoli, 1768.

[34] EULER, L., De formulis integrabilibus duplicatis, *Novi comentarii academiæ scientiarum Petropolitanæ*, 14(1770), 72–103.

[35] FOURIER, J., *Théorie analytique de la chaleur.* Didot, Paris, 1822. Rééd. Gabay, Sceaux, 1988.

[36] GROTHENDIECK, A., Produits tensoriels topologiques et espaces nucéaires, *Memoirs of the American Mathematical Society*, n° 16, 1955.

[37] HAAR, A., Über die Variation der Doppelintegrale, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 149, nos 1/2 (1926), 1–18.

[38] HAAR, A., Zur Variationsrechnung, *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 8, no 1 (1931/1932), 1–27.

[39] HATCHER, A., *Algebraic topology*, Cambridge University Press, 2002 (version gratuite autorisée par l'éditeur : `http://www.math.cornell.edu/~hatcher`)

[40] HEAVISIDE, O., On operators in Mathematical Physics, *Proc. of the Royal Society*, Londres, 52(1893), 504–529, 54(1894), 105–143.

[41] HEINE, E., Über trigonometrische Reihen, *J. Reine Angew. Math. (J. de Crelle)*, 71 (1870), 353–365.

[42] HEINE, E., Aus brieflichen Mittelheilungen (namentlich über Variationsrechnung), *Mathematische Annalen*, 2 (1870), 187–191.

[43] HEINE, E., Die Elemente der Functionenlehre, *J. Reine Angew. Math. (J. de Crelle)*, 74 (1872), 172–188.

[44] HORVÁTH, J., *Topological vector spaces and distributions.* Addison-Wesley, 1966.

[45] KOLMOGOROV, A. N., Zur Normierbarkeit eines allgemeinen topologischen linearen Raumes, *Studia Math.*, 5 (1934), 29–33 (en anglais : *Selected works*, vol. 1, Dordrecht, Kluwer (1991), 183–186.

[46] KRYLOFF, V. I., Sur l'existence des dérivées généralisées des fonctions sommables, *Doklady Akademie Nauk SSSR*, 45 (1947), 375–378.

[47] LADYZHENSKAYA, O. A., *The mathematical theory of viscous incompressible flow*, Gordon and Breach, 1963.

[48] LAGRANGE, J., *Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables*, Nouveaux mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin, année 1772, Berlin, 1774, 185–221.

[49] LEBESGUE, H., Intégrale, longueur, aire, *Ann. di Mat.*, (3), t. VII (1902), 231–359 (= Thèse, Paris).

[50] LEIBNIZ, W. G., Nova metodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus, *Acta Eruditorum*, 1884, 467–473

[51] LEMOINE, J. et SIMON, J., Extension of distributions and representation by derivatives of continuous functions, *Atti. Accad. Naz. Lincei*, Sér. 9, 7 (1996), 31–40.

[52] LERAY, J., Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace, *Acta Math.*, 63 (1934), 193–248.

[53] LIONS, J.-L., *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod & Gauthier–Villars, 1969.

[54] LÜTZEN, J., *The prehistory of the theory of distributions.* Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, Vol. 7, Springer-Verlag, 1982.

[55] NEUMANN, J. VON, On complete topological linear spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 37 (1935), 1–20.

[56] NEWTON, I., *The mathematical papers, vol. III, 1670–1673*, Cambridge University Press, 1969.

[57] OSTROGRADSKY, M., Dissertation (en russe), *Mémoires Acad. Sci. Saint-Pétersbourg, sc. math., phys., nat.* 1 (1831), 19–53.

[58] PAUMIER, A.-S., *Laurent Schwartz (1915-2002) et la vie collective des mathématiques*, thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 2014.

[59] PIER, J.-P., *Histoire de l'intégration*, Masson, 1996.

[60] POINCARÉ, H., *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, tome 3, Gauthiers–Villars, 1899.

[61] RADON, J., Theorie und Anwendungen der absolut additiven Mengenfunktionen, *Sitzungsber. Akad. Wissen. Wien.* 122 (1913), 1295–1438.

[62] DE RHAM, G., *Variétés différentiables*, Hermann, 1955.

[63] RIEMANN, B., *Gesammelte mathematische Werke*, Teubner, 2e éd., 1892.

[64] RIEMANN, B., Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe, *Abh. K. Gesell. Wiss. Göttingen, Math. Classe*, 3 (1866-1867), 87–132

[65] RUDIN, W., *Principes d'analyse mathématique*, Ediscience, 1995 (en anglais, McGraw–Hill, 1953).

[66] SCHAEFER, H. H., *Topological vector spaces*, Macmillan, 1966.

[67] SCHWARTZ, L., Généralisation de la notion de fonction, de dérivation, de transformation de Fourier, et applications mathématiques et physiques, *Ann. Univ. Grenoble*, 21 (1945), 57–74.

[68] SCHWARTZ, L., *Théorie des distributions*, Actual. Sci. et Ind., 1091 et 1122, Hermann, 1950–1951 (Nos notes historiques renvoient aux numéros de pages de la *Nouvelle édition augmentée*, de 1973.)

[69] SCHWARTZ, L., Sur l'impossibilité de la multiplication des distributions, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 239 (1954), 847–848.

[70] SCHWARTZ, L., Espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles, *J. Analyse Math. Jérusalem*, 4 (1955), 88–148.

[71] SCHWARTZ, L., Distributions à valeurs vectorielles, I et II, *Ann. Inst. Fourier*, 7 (1957) et 8 (1959).

[72] SCHWARTZ, L., *Analyse, Topologie générale et analyse fonctionnelle*, Hermann, 1970.

[73] SCHWARTZ, L., *Analyse I. Théorie des ensembles et topologie*, Hermann, 1991.

[74] SCHWARTZ, L., *Un mathématicien aux prises avec le siècle*, Odile Jacob, 1997.

[75] SCHWARZ, H. A., Zur integration der partiellen Differentialgleichung, *Journal reine angew. Math.*, 74 (1872), 218–253

[76] SIMON, J., Démonstration constructive d'un théorème de G. de Rham, *C. R. Acad. Sci. Paris, sér. I*, 316 (1993), 1167–1172.

[77] SIMON, J., Primitives de distributions et applications, *Rapport de Recherche 93-11, Laboratoire de Mathématiques Appliquées, Université Blaise Pascal*, 1993.

[78] SIMON, J., Representation of distributions and explicit antiderivatives up to the boundary, in *Progress in partial differential equations : the Metz surveys 2*, M. Chipot ed., Longman, 1993, 201-205.

[79] SIMON, J., Distributions à valeurs dans espace séquentiellement complet, *Prépublication du laboratoire de Mathématiques Appliquées*, Université Blaise Pascal, 1996.

[80] SIMON, J., *Espaces de Banach, Fréchet, Hilbert et Neumann*, série Analyse pour les EDP, volume 1, ISTE Editions, Londres, 2017.

[81] SIMON, J., *Fonctions continues*, série Analyse pour les EDP, volume 2, ISTE Editions, Londres, 2020.

[82] SIMON, J., *Continuous Functions*, Analysis for PDEs set, volume 2, ISTE Ltd, London, and John Wiley & Sons, New-York, 2019.

[83] SIMON, J., *Espaces semi-normés*, à paraître.

[84] SIMON, J., *Plus sur les distributions*, à paraître.

[85] SMIRNOV, S. K., Decomposition of solenoidal vector charges into elementary solenoids and the structure of normal one-dimensional currents, *St. Petersburg Math. J.*, 5, 1993, n° 4, 841–867.

[86] SOBOLEV, S. L., Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations hyperboliques normales, *Recueil mathématique*, 1 (1936), 39–72.

[87] STEGMANN, F. L., *Lehrbuch der Variationsrechnung und ihrer Anwendung bei Untersuchungen über das Maximum und Minimum*, J.G. Luckhardt, Kassel, 1854.

[88] TARTAR, L., *Topics in nonlinear analysis*, Publications mathématiques de l'université d'Orsay, 1978.

[89] THOMAE, J., *Abriss einer Theorie der complexen Funktionen und Thetafunktionen einer Veränderlichen*, Halle (Nebert), 1870.

[90] TREVES, F., *Topological vector spaces, distributions and kernels*, Academic Press, 1967.

[91] VOLTERRA, V., *Leçons sur les fonctions de lignes*, Gauthier-Villars, 1913.

Chapitre 15

Index

E

F

G

H

I

J, K

L

M

N

O

P