

**SUR
LE
CONTROLE
PAR
UN
DOMAINE
GEOMETRIQUE**

F.MURAT

J.SIMON

N° ENREGISTREMENT : 76 015

UNIVERSITE P. et M. CURIE (PARIS VI)

LABORATOIRE ANALYSE NUMERIQUE

L.A. 189

Tour 55.65 - 5ème étage

4 place Jussieu

75230 PARIS CEDEX 05

SUR LE CONTRÔLE PAR UN DOMAINE GEOMETRIQUE

par François MURAT et Jacques SIMON

Un résumé de cet article est paru sous
le titre :

"Etude de problèmes d'Optimal Design"
dans "Optimization Techniques : Modeling
and Optimization in the Service of Man",
(Proceedings, 7th IFIP Conference, Nice,
Sept 1975, Part 2) - Lectures Notes in
Computer Science n° 41, Springer-Verlag (1976)
pp 54-62.

T A B L E d e s M A T I E R E S

I - INTRODUCTION

1.1.	Motivation	I-1
1.2.	Position du problème	I-2
1.3.	Espaces de domaines	I-4
1.3.1.	Définition et structure métrique	I-4
1.3.2.	Structure différentielle	I-6
1.4.	Etude des problèmes de contrôle par le domaine	I-8
1.4.1.	Problèmes traités	I-8
1.4.2.	Existence d'un domaine optimal	I-10
1.4.3.	Dérivation des fonctions coût	I-11
1.5.	Résultats heuristiques de dérivation	I-15
1.5.1.	Enoncé des résultats	I-15
1.5.2.	Méthode de démonstration	I-16
1.5.3.	Commentaire	I-19

II - CONSTRUCTION ET PROPRIETES METRIQUES D'ESPACES DE DOMAINES

2.0.	Introduction	II-1
2.1.	Définition des espaces $\mathcal{G}^{k,s}$ de difféomorphismes de \mathbb{R}^N	II-3
2.2.	Notations et résultats matriciels	II-4
2.3.	Propriétés de la composition dans les espaces d'applications régulières $\mathcal{H}^{k,s}$	II-7
2.3.1.	Propriétés de continuité et majoration de la composée de deux applications	II-8
2.3.2.	Inversibilité des applications voisines de l'identité.	II-15
2.4.	Pseudo-distance et propriétés métriques des espaces de difféomorphismes $\mathcal{G}^{k,s}$	II-19
2.4.1.	Pseudo-distance sur un espace	II-19
2.4.2.	Pseudo-distance sur $\mathcal{G}^{k,s}$	II-22
2.5.	Propriétés algébriques et propriétés métriques des espaces de domaines	II-26
2.5.1.	Définition et propriétés algébriques des espaces $\mathcal{D}_{\mathbb{Q}}^{k,s}$	II-26
2.5.2.	Pseudo-distance et propriétés métriques de $\mathcal{D}_{\mathbb{Q}}^{k,s}$	II-27

2.6.	Compléments sur les espaces de domaines $\mathcal{D}_q^{k,\sigma}$	II-32
2.6.1.	Métrie de Hausdorff	II-32
2.6.2.	Résultats de compacité	II-34
2.6.3.	Construction par passage au quotient	II-37
2.6.4.	Contre-exemple où $d_{1,\infty}$ n'est pas pseudo-distance sur $\mathcal{D}_q^{1,\infty}$	II-38
2.7.	Ouverts à bord régulier	II-39
2.7.1.	Ouverts de classe $W^{k,\sigma}$	II-39
2.7.2.	Ouverts localement graphes lipschitziens ou continus	II-41

III - DERIVATION DANS LES ESPACES DE DOMAINES ET CONDITIONS NECESSAIRES D'OPTIMALITE

3.0.	Introduction	III-1
3.1.	Notion de dérivation dans les espaces de domaines $\mathcal{D}_q^{k,\sigma}$	III-2
3.1.1.	Généralités	III-2
3.1.2.	Définition des notions de dérivation	III-3
3.1.3.	Exemples d'applications dérivables	III-6
3.2.	Propriétés élémentaires des applications dérivables	III-7
3.2.1.	Les applications dérivables sont localement lipschitziennes	III-7
3.2.2.	Dérivation des applications composées	III-11
3.2.3.	Dérivabilité sur des espaces plus petits, ou à valeurs dans des espaces plus grands	III-12
3.3.	Propriétés spécifiques des dérivées dans les espaces de domaines	III-13
3.3.1.	Propriétés de la bijection associée à un champ de vecteurs	III-14
3.3.2.	Indépendance de la dérivée d'une fonction définie sur un espace de domaines $\mathcal{D}_q^{k,\sigma}$ par rapport à la composante tangentielle du champ θ	III-20
3.3.3.	Ensemble parcouru par la dérivée multivoque d'une application à valeurs dans un espace de domaines ..	III-23
3.4.	Conditions nécessaires d'optimalité	III-32
3.4.1.	Conditions nécessaires d'optimalité élémentaires	III-32
3.4.2.	Espace tangent à une famille de domaines	III-33
3.4.3.	Conditions nécessaires d'optimalité générales	III-34

3.5.	Etude de quelques espaces tangents	III-35
3.5.1.	Famille de domaines définie par une équation. Applications aux domaines de volume donné ou de surface donnée	III-36
3.5.2.	Famille de domaines définie par une inéquation	III-42
3.5.3.	Famille de domaines paramétrée. Résultats abstraits	III-44
3.5.4.	Famille de domaines paramétrée. Applications à la localisation d'un objet de forme donnée, et aux domaines définis par le graphe d'une fonction	III-49

IV - DERIVATION D'UNE INTEGRALE PAR RAPPORT A SON DOMAINE D'INTEGRATION

4.0.	Introduction	IV-1
4.1.	Dérivation de la composée d'une fonction par un difféo- morphisme par rapport à celui-ci	IV-3
4.1.1.	Rappels sur les espaces de Sobolev	IV-3
4.1.2.	Un résultat de changement de variable	IV-4
4.1.3.	Dérivation sur l'application $T \rightarrow f \circ T$ dans le cas où f est "régulière"	IV-9
4.1.4.	Dérivation de l'application $T \rightarrow (f \circ T) \det [T'] $ dans le cas où f est intégrable	IV-15
4.1.5.	Dérivation de l'application $T \rightarrow (\phi(T)) \circ T^{-1}$	IV-19
4.2.	Dérivation d'une intégrale par rapport à son domaine d'intégration	IV-23
4.2.1.	Cas général	IV-23
4.2.2.	Cas où la fonction intégrée ne dépend pas du domaine.	IV-24
4.3.	Généralités sur l'intégrale superficielle	IV-25
4.3.1.	Définition de l'intégrale superficielle	IV-25
4.3.2.	Changement de variable dans une intégrale superficielle	IV-27
4.3.3.	Transport de la normale par un difféomorphisme	IV-33
4.3.4.	Formule d'intégration par parties sur le bord d'un ouvert	IV-34
4.4.	Dérivation d'une intégrale superficielle par rapport à son domaine d'intégration	IV-38
4.4.1.	Cas général	IV-38
4.4.2.	Cas où la fonction intégrée ne dépend pas du domaine	IV-40

V - ETUDE D'UN PROBLEME MODELE DE CONTROLE PAR LE DOMAINE, ASSOCIE A UN PROBLEME DE DIRICHLET

5.0.	Introduction	V-1
5.1.	Position du problème	V-4
5.2.	Existence d'un domaine optimal	V-6
5.3.	Dérivation de la fonction coût	V-9
5.4.	Dérivation du transporté sur un domaine fixe de la solution du problème homogène	V-12
5.5.	Démonstration des résultats de dérivation de la fonction coût	V-17
5.6.	Variante relative à une fonction coût définie par une intégrale sur le bord du domaine	V-21
5.6.1.	Existence d'un domaine optimal	V-22
5.6.2.	Dérivation de la fonction coût	V-26
5.6.3.	Dérivation du transporté sur un domaine fixe de la solution du problème homogène	V-28
5.6.4.	Démonstration des résultats de dérivation de la fonction coût	V-29
5.7.	Compléments sur la dérivation de l'état. Application à l'étude de problèmes où la fonction coût est définie par une intégrale sur un domaine fixe	V-34
5.7.1.	Dérivation de restrictions de l'état	V-34
5.7.2.	Dérivation d'un prolongement de l'état	V-38
5.7.3.	Application à l'étude de problèmes où la fonction coût est définie par une intégrale sur un domaine fixe	V-39

VI - ETUDE DE PROBLEMES DE CONTROLE PAR LE DOMAINE, ASSOCIES A UN PROBLEME DE NEUMANN.

6.0.	Introduction	VI-1
6.1.	Position du problème	VI-2
6.2.	Existence d'un domaine optimal	VI-3
6.3.	Dérivation des fonctions coûts	VI-4
6.4.	Dérivation du transporté de l'état sur un domaine fixe	VI-6
6.5.	Démonstration des résultats de dérivation des fonctions coûts	VI-10
6.6.	Complément sur la dérivation de l'état	VI-15

VII - BIBLIOGRAPHIE

..... VII-1

I. INTRODUCTION.

Dans ce chapitre d'introduction, nous posons de façon générale les problèmes de contrôle par le domaine, et nous présentons les méthodes que nous utilisons pour étudier ces problèmes (en particulier les espaces de domaines dans lesquels nous travaillons). Nous donnons également une méthode heuristique pour obtenir des résultats de dérivation; elle ne sera pas développée dans ce travail où nous ne nous intéressons qu'à quelques problèmes modèles.

On suit le plan :

- 1.1. Motivation.
- 1.2. Position du problème.
- 1.3. Espaces de domaines.
- 1.4. Etude des problèmes de contrôle par le domaine.
- 1.5. Résultats heuristiques de dérivation.

1.1. MOTIVATION.

L'objet de ce travail est l'étude de problèmes de contrôle optimal où le contrôle est la forme d'un domaine dans lequel l'état du système est défini par une équation aux dérivées partielles.

De nombreux problèmes de physique sont de ce type : Détermination de la forme d'un profil d'aile ou de coque créant une trainée minimale BOUROT [1], KRAIKO - TILLIAEVA [1], MIELE [1], MURAT - SIMON [1], PIRONNEAU [1], [2]; recherche de la forme d'une paroi poreuse assurant un régime de diffusion donné BEGIS - GLOWINSKI [1], [2]; localisation d'un objet de forme donnée (par exemple d'un élément d'un tube électronique afin d'en optimiser les qualités) KOENIG - ZOLESIO [1], [2]; détermination de la forme d'une pièce de poids minimal pouvant supporter certaines contraintes DESTUYNDER [1].

Un problème de même nature et qui a été souvent considéré, est celui de la variation des valeurs propres associées à un domaine lorsqu'on déforme celui-ci. Dès 1907, HADAMARD [1] l'étudiait dans son "Mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées". Citons également JOSEPH [1], GARABEDIAN - SCHIFFER [2], LICARI - WARNER [1], ROUSSELET [1].

Certains problèmes de surface libre ont été reliés à des problèmes de contrôle par un domaine géométrique cf. GARABEDIAN - LEWY - SCHIFFER [1], GARABEDIAN - SPENCER [1], JOSEPH - FOSDICK [1], MORICE [1]. Il s'agit de déterminer un domaine dans lequel la solution d'une équation aux dérivées partielles vérifie des conditions aux limites surabondantes. Une méthode consiste à minimiser une fonction du domaine dont l'annulation de la dérivée donne la condition aux limites surabondante. La principale difficulté est de montrer qu'au minimum, la dérivée de la fonction est bien nulle (et non seulement de signe donné), c'est à dire que le minimum est atteint à "l'intérieur" de l'ensemble des domaines admissibles, ou encore que les contraintes ne sont pas saturées.

1.2. POSITION DU PROBLEME.

Etant donné un domaine D , ouvert connexe de \mathbb{R}^N , on lui associe l'état du système, $u(D)$, qui est solution d'un problème aux limites dans D :

$$(1.1) \quad \begin{cases} \mathcal{A}(u(D)) = 0 & \text{dans } D \\ \mathcal{B}(u(D)) = 0 & \text{sur } \partial D \end{cases}$$

On définit alors un coût réel par :

$$(1.2) \quad J(D) = \int_D \mathcal{C}(u(D)) \, dx$$

où \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} sont des opérateurs aux dérivées partielles, linéaires ou non, donnés dans \mathbb{R}^N et à valeurs réelles ou vectorielles (c'est à dire que l'on peut avoir plusieurs équations ou conditions aux limites).

On considèrera également des coûts définis par :

$$(1.3) \quad J_1(D) = \int_{\partial D} \mathcal{G}_1(u(D)) \, ds$$

$$(1.4) \quad J_2(D) = \int_A \mathcal{G}_2(u(D)) \, dx$$

où ∂D est le bord de D , et A un ouvert fixe de \mathbb{R}^N strictement inclus dans D .

On suppose que, moyennant certaines hypothèses sur D (régularité, caractère borné, etc...) le problème est bien posé, c'est à dire que le système (1.1) admet une solution unique $u(D)$ telle que la fonction coût $J(D)$ soit définie.

Etant donnée une famille admissible \mathcal{D}_{ad} de domaines pour lesquels le problème (1.1), (1.2) est bien posé, on cherche un domaine D_0 minimisant J sur \mathcal{D}_{ad} , c'est à dire tel que :

$$(1.5) \quad \begin{cases} J(D_0) = \inf_{D \in \mathcal{D}_{ad}} J(D) \\ D_0 \in \mathcal{D}_{ad} \end{cases}$$

On se pose trois problèmes classiques en optimisation :

- i) Etablir l'existence d'un domaine optimal.
- ii) Donner des propriétés du ou des domaines optimaux.
- iii) Trouver une méthode constructive de calcul d'un domaine optimal.

Dans les problèmes de contrôle usuels, le contrôle appartient en général à un sous ensemble d'un espace affine normé, et on utilise des propriétés de continuité de J sur cet espace pour résoudre i) et des propriétés de dérivabilité pour résoudre ii) et iii).

Une des difficultés essentielles des problèmes de contrôle par le domaine est que l'on ne connaît pas dans l'arsenal classique de l'analyse, d'ensembles de domaines munis d'une structure d'espace affine normé. Notre travail aura donc deux objets :

i) Définition d'espaces de domaines munis d'une structure métrique (permettant d'étudier les problèmes de continuité) et d'une "structure différentielle" (permettant d'étudier les problèmes de dérivabilité).

ii) Etude de quelques problèmes modèles de contrôle par le domaine, pour lesquels l'état du système est solution d'une équation aux dérivées partielles elliptique d'ordre 2, avec conditions aux limites de Dirichlet ou de Neumann.

1.3. ESPACES DE DOMAINES.

1.3.1. Définition et structure métrique .

On cherche à construire des ensembles de domaines dans lesquels on choisira les familles admissibles \mathcal{D}_{ad} . Il est parfois nécessaire, pour que le problème (1.1), (1.2) soit bien posé, que le bord des domaines ait une régularité donnée (dépendant du problème), et on cherche une notion de convergence des domaines qui conserve cette régularité par passage à la limite.

Ces ensembles de domaines doivent être le plus "vastes" possible, afin de limiter les a-priori sur la forme optimale à déterminer. Il est par exemple parfois intéressant que cette forme puisse présenter des coins .

De tels ensembles de domaines ont notamment été proposés par BENDALI [1], CHENAIS [1],[2], LIONS [1], MOSCO [1], NEČAS [1].

Les ensembles de domaines que nous introduisons dans ce travail sont des espaces métriques complets, formés de domaines difféomorphes entre eux, l'ordre de régularité des difféomorphismes étant à notre disposition.

Plus précisément étant donnés Q un ouvert de \mathbb{R}^N , k un entier, et σ un indice à 2 valeurs ($+\infty$ ou \bar{c}), on définit les espaces de domaines $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$:

$$\mathcal{D}_Q^{k,\sigma} = \{ D = T(Q) \mid T \in \mathcal{C}^{k,\sigma} \}$$

où $\mathcal{C}^{k,\sigma}$ est un groupe de bijections de \mathbb{R}^N régulières d'ordre k , défini par :

$$\mathcal{C}^{k,\sigma} = \{ T \mid T - I \in W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N), T^{-1} - I \in W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \}$$

[on note I l'identité de \mathbb{R}^N , $W^{k,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ (resp. $W^{k,\bar{c}}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$) l'espace des fonctions de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R}^N dont les dérivées d'ordre inférieur ou égal à k sont uniformément bornées (resp. uniformément bornées et uniformément continues)].

On munit l'espace $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ d'une pseudo-distance (i.e. une distance pour laquelle l'inégalité triangulaire a été affaiblie) définie par :

$$d_{k,\sigma}(D_1, D_2) = \inf_{\substack{T \in \mathcal{C}^{k,\sigma} \\ T(D_1) = D_2}} \{ \|T - I\|_{W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} + \|T^{-1} - I\|_{W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} \}$$

Les principales propriétés⁽¹⁾ de ces espaces sont les suivantes :

- i) Il existe une constante positive η_k telle que l'application $d_{k,\sigma}^{(1/2)} = \text{Inf} \{ d_{k,\sigma}; \eta_k \}^{1/2}$ soit une distance sur $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$.
- ii) L'espace $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ muni de cette distance est complet.
- iii) Si $k \geq 2$, l'injection de $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ dans $\mathcal{D}_Q^{k-1,\sigma}$ est compacte.

L'étude de ces problèmes est l'objet du chapitre 2.

⁽¹⁾ L'espace $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ peut être identifié algébriquement au groupe quotient de $\mathcal{C}^{k,\sigma}$ par la relation d'équivalence $T_1 \sim T_2$ ssi $T_1(Q) = T_2(Q)$; $d_{k,\sigma}$ définit alors la topologie quotient.

1.3.2. Structure différentielle.

Les espaces $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ que nous avons définis n'étant pas des espaces affines normés, la notion de dérivation n'y est donc pas définie à priori. Pour l'obtention de conditions nécessaires d'optimalité, et pour la mise en oeuvre de méthodes constructives de calcul d'un domaine optimal, il est cependant utile d'avoir une notion de dérivation, ou encore de variation infinitésimale du domaine.

Une idée naturelle introduite par HADAMARD [1] consiste à déformer l'ouvert en déplaçant chaque point du bord le long de la normale. Une autre idée est de déplacer tous les points de l'ouvert (et non seulement ceux du bord) en leur ajoutant un vecteur dépendant du point. C'est la méthode des "variations intérieures" introduites par GARABEDIAN - SCHIFFER [1], où l'ouvert D est déformé en $(I + \varepsilon\theta)(D)$, ε étant un paramètre réel petit et θ un champ de vecteurs. Une troisième idée introduite par CEA - GIOAN - MICHEL [1], consiste à ajouter ou à retrancher des parties à l'ouvert, en considérant des variations infinitésimales (pour la norme de $L^1(\mathbb{R}^N)$) de sa fonction caractéristique.

Nous introduisons dans ce travail une "structure différentielle" qui reprend l'idée des variations intérieures. Plus précisément nous définissons une notion de dérivation qui utilise les difféomorphismes grâce auxquels on a construit les espaces $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$:

$$(1.6) \left\{ \begin{array}{l} \text{Une fonction } J \text{ définie sur } \mathcal{D}_Q^{k,\sigma}, \text{ à valeurs dans un Banach } E, \text{ est} \\ \text{dérivable au point } D_0 \text{ si la fonction } \theta \rightarrow J((I + \theta)(D_0)) \text{ est Fréchet} \\ \text{dérivable (au sens usuel) de } W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \text{ à valeurs dans } E \text{ au point } 0, \\ \text{et sa dérivée est définie par} \\ \frac{\partial J}{\partial D}(D_0) = \frac{\partial J((I + \theta)(D_0))}{\partial \theta}(0) \in L_c(W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N); E) \end{array} \right.$$

Cette définition revient à considérer les champs de vecteurs θ de $W^{k,\sigma}(R^N, R^N)$ comme des accroissements du domaine D_0 . Elle est loisible, car tout voisinage assez petit de D_0 (pour la pseudo-distance $d_{k,\sigma}$) peut être représenté (de façon non unique) sous la forme $(I + \theta)(D_0)$ où θ parcourt un voisinage de 0 dans $W^{k,\sigma}(R^N, R^N)$.

Nous introduirons également une notion de dérivation analogue pour les fonctions définies sur un espace de Banach et à valeurs dans $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$.

Les fonctions dérivables au sens où nous les avons définies possèdent des propriétés des fonctions dérivables au sens usuel:

i) Une fonction dérivable est localement lipschitzienne, (donc continue), $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ étant muni de la pseudo-distance $d_{k,\sigma}$.

ii) La composée de deux applications dérivables est dérivable (la dérivabilité étant considérée au sens usuel ou non selon les espaces où on opère).

Cependant la représentation $\theta \rightarrow (I + \theta)(D_0)$ d'un voisinage de D_0 n'étant pas injective, on a des propriétés particulières, notamment :

$$(1.7) \left\{ \begin{array}{l} \text{Si une fonction } J, \text{ définie sur } \mathcal{D}_Q^{k,\sigma} \text{ à valeurs dans un espace de} \\ \text{Banach } E \text{ est dérivable en un point } D_0, \text{ sa dérivée (dans la direction } \tau) \\ \frac{\partial J}{\partial D}(D_0) \cdot \tau \text{ ne dépend de } \tau \text{ que par } \langle n, \tau \rangle = \sum_{i=1}^N n_i \tau_i, \\ \text{trace normale de } \tau \text{ sur } \partial D_0^{(1)} \end{array} \right.$$

Cette notion de dérivation permet d'obtenir des conditions nécessaires d'optimalité du 1er ordre :

(1) Nous démontrons ce résultat pour D_0 assez régulier et $\sigma = \bar{c}$; quand $\sigma = +\infty$, on a un résultat plus faible.

$$(1.8) \left\{ \begin{array}{l} \text{Si une fonction } J, \text{ définie sur } \mathcal{D}_Q^{k,\sigma}, \text{ à valeurs réelles, dérivable,} \\ \text{atteint son minimum sur } \mathcal{D}_{ad} \text{ en un point } D_0, \text{ on a} \\ \frac{\partial J}{\partial D}(D_0) \cdot \tau > 0 \quad \forall \tau \in W^{k,\sigma}(R^N, R^N) \\ \text{tel que } (I + h\tau)(D_0) \in \mathcal{D}_{ad} \text{ pour tout } h \text{ assez petit} \end{array} \right.$$

On peut accroître l'ensemble des τ vérifiant (1.8) en introduisant l'espace tangent dans $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ à \mathcal{D}_{ad} au point D_0 . Cela permet d'obtenir des informations dans le cas où \mathcal{D}_{ad} ne contient pas de segments issus de D_0 .

L'étude de ces problèmes est l'objet du chapitre 3.

1.4. ETUDE DES PROBLEMES DE CONTROLE PAR LE DOMAINE.

1.4.1. Problèmes traités.

Notre étude ne porte pas sur le problème abstrait (1.1), (1.2), mais sur des problèmes particuliers. Nous considérons tout d'abord le problème (1):

$$(1.9) \quad \begin{cases} -\Delta u(D) = f & \text{dans } D \\ u(D) = g & \text{sur } \partial D \end{cases}$$

$$(1.10) \quad J(D) = \int_D |\text{grad}(u(D) - z)|^2 dx$$

(1) Dans le cas particulier où D est une couronne de R^N de bord intérieur S et extérieur Σ , où g est nulle sur S et égale à une constante donnée γ sur Σ , et où $f = z = 0$, $u(D)$ est le potentiel électrique et $J(D)$ l'énergie électrique du condensateur d'armatures S et Σ chargé au potentiel v . Les résultats ont dans ce cas une forme simple, cf. MURAT - SIMON [1].

(où f, g, z sont des fonctions données dans \mathbb{R}^N), ainsi que des variantes, relatives aux fonctions coût :

$$(1.11) \quad J_1(D) = \int_{\partial D} \left| \frac{\partial u(D)}{\partial n} - z \right|^2 ds$$

$$(1.12) \quad J_2(D) = \int_A |\tilde{u}(D) - z|^2 dx$$

où A est un ouvert fixe de \mathbb{R}^N et $\tilde{u}(D)$ le prolongé de $u(D)$ par g à \mathbb{R}^N .

L'étude détaillée de ce problème est l'objet du chapitre 5.

Nous considérons également les problèmes :

$$(1.13) \quad \begin{cases} -\Delta u(D) + u(D) = f & \text{dans } D \\ \frac{\partial u(D)}{\partial n} = g & \text{sur } \partial D \end{cases}$$

$$(1.14) \quad J_1(D) = \int_D |\text{grad}(u(D) - z)|^2 dx$$

ou

$$(1.15) \quad J_2(D) = \int_{\partial D} |u(D) - z|^2 ds,$$

que nous traitons plus rapidement au chapitre 6.

Nous établissons essentiellement des résultats :

- i) d'existence d'un domaine optimal,
- ii) de dérivation des fonctions coût.

Les propriétés de dérivation conduisent à des conditions nécessaires d'optimalité. Cet aspect, développé de façon générale au chapitre 3, n'est pas repris dans les chapitres 5 et 6.

Il resterait à élaborer dans le cadre général que nous proposons une méthode constructive de calcul d'un domaine optimal, (on pourrait par exemple, à partir des résultats de dérivation, développer des méthodes "de gradient"), et à faire l'analyse numérique du problème. Ces questions ont été étudiées, sur des exemples divers et avec des approches différentes, par de nombreux auteurs, notamment : BEGIS - GLOWINSKI [1], [2], CEA [1], DJADANE [1], GIOAN [1], MICHEL [1], PALMERIO - DERVIEUX [1], [2].

Pour étudier les problèmes (1.9) à (1.15), nous nous plaçons dans le cadre de la théorie variationnelle des problèmes aux limites, et nous essayons de faire des hypothèses de régularité aussi faibles que possible sur les fonctions données f, g, z et sur l'ordre de régularité k des espaces $\mathcal{D}_Q^{k, \sigma}$ (c.à.d. de considérer de "grands" espaces de domaines).

Les méthodes que nous employons ont une portée générale. Nous ne les mettrons pas en oeuvre sur le problème abstrait (1.1), (1.2), car cela alourdirait l'exposé et donnerait probablement, pour un problème particulier, des résultats plus grossiers qu'une étude directe. Nous allons cependant en dégager les principes dans le cas général.

1.4.2. Existence d'un domaine optimal.

Nous considérons un domaine Q suffisamment régulier et un ordre de régularité k assez élevé pour que le problème (1.1), (1.2) soit bien posé sur l'espace $\mathcal{D}_Q^{k, \sigma}$. Pour obtenir un résultat d'existence, nous établissons une propriété de continuité (ou de s.c.i.) de J et nous choisissons l'ensemble \mathcal{D}_{ad} des domaines admissibles compact pour la topologie correspondante. Pour démontrer la continuité, nous nous ramenons à un domaine fixe par une des deux méthodes suivantes :

Méthode de changement de variable. Etant donné $D = T(Q)$, on transporte le problème (1.1), (1.2) en un problème sur le domaine fixe Q par le changement de variable T ; il vient :

$$J(T(Q)) = \int_Q \mathcal{C}_T(w_T) dx$$

où \mathcal{C}_T est le transporté de l'opérateur \mathcal{C} et où $w_T = (u(T(Q)))$. T est solution du problème aux limites :

$$\begin{cases} \mathcal{A}_T(w_T) = 0 & \text{dans } Q \\ \mathcal{B}_T(w_T) = 0 & \text{sur } \partial Q \end{cases}$$

Si les coefficients des opérateurs \mathcal{A}_T , \mathcal{B}_T et \mathcal{C}_T dépendent continûment de T , et si la solution d'un problème du type (1.1) dépend continûment des coefficients des opérateurs, l'application $T \rightarrow J(T(Q))$ est continue, ce qui entraîne la continuité de $D \rightarrow J(D)$.

Cette méthode est bien adaptée aux espaces de domaines que nous avons définis, et elle se généralise aux fonctions coût de type (1.3) et (1.4).

Méthode de prolongement : On introduit un prolongement $\tilde{u}(D)$ de $u(D)$ à \mathbb{R}^N , et un prolongement $\tilde{\mathcal{C}}$ de l'opérateur \mathcal{C} ; il vient :

$$J(D) = \int_{\mathbb{R}^N} \chi(D) \tilde{\mathcal{C}}(\tilde{u}(D)) \, dx$$

où $\chi(D)$ est la fonction caractéristique de l'ouvert D .

Si $\tilde{u}(D)$ et $\chi(D)$ dépendent continûment de D pour des topologies convenables, la fonction J est continue.

Nous utiliserons cette méthode pour démontrer l'existence d'un domaine optimal pour le problème (1.9), (1.10), où l'on a un prolongement naturel de l'état; elle conduit alors à un résultat plus fin que la méthode précédente. Mais en général, nous ne savons pas choisir des prolongements convenables.

1.4.3. Dérivation des fonctions coût.

i) Considérons un espace de domaines $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$, où le problème (1.1), (1.2) est bien posé. La fonction coût est du type

$$J(D) = \int_D \phi(D) \, dx$$

où $\phi(D) = \mathcal{C}(u(D))$ est défini pour $D \in \mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$.

Dériver la fonction J en un "point" D_0 de $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ revient, d'après la définition (1.6), à dériver l'application $\theta \rightarrow J((I + \theta)(D_0))$ au point 0. Pour cela nous nous ramenons au domaine fixe D_0 par le changement de variable $I + \theta$. Il vient :

$$\begin{aligned} J((I + \theta)(D_0)) &= \int_{(I + \theta)(D_0)} \phi((I + \theta)(D_0)) \, dx \\ &= \int_{D_0} \bar{\phi}_{D_0}(\theta) \, |\det [(I + \theta)']| \, dx \end{aligned}$$

où $\bar{\phi}_{D_0}(\theta) = \{ \phi((I + \theta)(D_0)) \} \circ (I + \theta)$.

Nous montrons que $\theta \rightarrow |\det [(I + \theta)']|$ est dérivable, et donc, si $\theta \rightarrow \bar{\phi}_{D_0}(\theta)$ est dérivable, $\theta \rightarrow J((I + \theta)(D_0))$ est dérivable. C'est dire qu'alors la fonction J est dérivable au point D_0 , et l'on a :

$$(1.16) \quad \frac{\partial J}{\partial D}(D_0) \cdot \tau = \int_{D_0} \{ \phi(D_0) \operatorname{div} \tau + \frac{\partial \bar{\phi}_{D_0}}{\partial \theta}(0) \cdot \tau \} \, dx, \quad \forall \tau \in W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N).$$

L'objet du chapitre 4 est d'établir ce résultat, pour une fonction ϕ générale, et un résultat analogue⁽¹⁾ pour un coût défini par une intégrale superficielle, i.e. :

$$J_1(D) = \int_{\partial D} \phi(D) \, ds$$

(1) Quand $\phi(D)$ est la restriction à D d'une fonction f donnée dans \mathbb{R}^N , ou sa trace sur ∂D , on obtient en particulier :

$$\frac{\partial \left(\int_D f \, dx \right)}{\partial D}(D_0) \cdot \tau = \int_{\partial D_0} \langle n, \tau \rangle f \, ds \quad \forall \tau \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$$

$$\frac{\partial \left(\int_{\partial D} f \, ds \right)}{\partial D}(D_0) \cdot \tau = \int_{\partial D_0} \langle n, \tau \rangle \left(\frac{\partial f}{\partial n} + H f \right) \, ds \quad \forall \tau \in W^{1,\bar{c}}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$$

où H est la courbure moyenne de ∂D_0 (on suppose f et D_0 assez réguliers).

ii) Pour montrer la dérivabilité de J , il reste donc à vérifier l'hypothèse de dérivabilité faite sur $\bar{\Phi}_{D_0}(\theta) = \{G(u((I + \theta)(D_0)))\} \circ (I + \theta)$, ce qui résul-

tera de la dérivabilité de l'application :

$$(1.17) \quad \theta \rightarrow \bar{u}_{D_0}(\theta) = \{u((I + \theta)(D_0))\} \circ (I + \theta) .$$

La fonction $\bar{u}_{D_0}(\theta)$ est définie sur le domaine fixe D_0 . En transformant par le changement de variable $I + \theta$ l'équation (1.1) qui définit $u((I + \theta)(D_0))$, il vient :

$$(1.18) \quad \begin{cases} \mathcal{A} & (I + \theta) (\bar{u}_{D_0}(\theta)) = 0 & \text{dans } D_0 \\ \mathcal{B} & (I + \theta) (\bar{u}_{D_0}(\theta)) = 0 & \text{sur } \partial D_0 . \end{cases}$$

Un théorème général de dérivabilité de la solution d'une équation implicite (ici (1.18)) permet d'obtenir la dérivabilité de $\theta \rightarrow \bar{u}_{D_0}(\theta)$, et donne la dérivée $\frac{\partial \bar{u}_{D_0}}{\partial \theta}(0) \cdot \tau$ comme solution d'un problème aux limites dans D_0 .

Nous établissons ainsi la dérivabilité de J , et (1.16) donne une expression de sa dérivée sous forme d'une intégrale sur D_0 faisant intervenir $\frac{\partial \bar{u}_{D_0}}{\partial \theta}(0) \cdot \tau$.

iii) Il peut être intéressant d'exprimer la dérivée de J sous la forme

$$\frac{\partial J}{\partial D}(D_0) \cdot \tau = \int_{\partial D_0} \langle n, \tau \rangle \mathcal{F}(D_0) ds$$

où la fonction $\mathcal{F}(D_0)$ ne dépend pas de τ , car cela permet de donner explicitement des directions de descente et des conditions nécessaires d'optimalité du 1^{er} ordre.

Nous obtenons une expression de ce type pour tous les problèmes modèles que nous étudions dans ce travail, en décomposant la dérivée de \bar{u}_{D_0} en :

$$(1.19) \quad \frac{\partial \bar{u}_D}{\partial \theta}(0) \cdot \tau = U(\tau) + \langle \text{grad } u(D_0), \tau \rangle$$

puis en introduisant un état adjoint convenable et en effectuant des intégrations par parties. Nous ne savons mener ces calculs que quand $U(\tau)$ est assez régulier, ce qui nous amène à faire une hypothèse de régularité sur $\text{grad } u(D_0)$ (qu'on vérifie en choisissant D_0 assez régulier).

iv) Calculons formellement la dérivée de $u(D)$ par rapport à D , c'est à dire, d'après la définition (1.6)

$$\frac{\partial u(D)}{\partial D}(D_0) \cdot \tau = \frac{\partial u((I + \theta)(D_0))}{\partial \theta}(0) \cdot \tau$$

D'après la définition (1.17) de $\bar{u}_{D_0}(\theta)$, on a :

$$u((I + \theta)(D_0)) = (\bar{u}_{D_0}(\theta)) \circ (I + \theta)^{-1}$$

et il vient, en dérivant par rapport à θ : (1)

$$\frac{\partial u(D)}{\partial D}(D_0) \cdot \tau = \frac{\partial \bar{u}_{D_0}(\theta)}{\partial \theta}(0) \cdot \tau - \langle \text{grad } \bar{u}_{D_0}(0), \tau \rangle$$

L'égalité (1.19) montre, puisque $\bar{u}_{D_0}(0) = u(D_0)$, que le second membre est égal à $U(\tau)$.

Mais la dérivée de $u(D)$ par rapport à D n'a pas de sens, car pour pouvoir appliquer la définition (1.6), il faudrait que l'application $D \rightarrow u(D)$ soit à valeurs dans un espace fixe (alors que $u(D)$ est défini sur D).

Nous justifierons ce calcul en considérant les restrictions de $u(D)$ à des ouverts fixes strictement inclus dans D . Cela permet de dériver des fonctionnelles définies par une intégrale sur un ouvert fixe.

(1) Nous établissons au chapitre 4 un résultat de dérivation de l'application

$$\theta \rightarrow (\varphi(\theta)) \circ (I + \theta)^{-1}.$$

1.5. RESULTATS HEURISTIQUES DE DERIVATION.

Dans ce paragraphe nous établissons des résultats formels de dérivation pour le problème général de contrôle par le domaine. La méthode employée ne sera pas développée dans ce travail, car elle suppose des hypothèses de régularité fortes.

1.5.1. Enoncé des résultats.

Considérons le problème de contrôle (1.1), (1.2). La dérivée de la fonction coût est donnée, formellement, par : (1)

$$(1.19) \quad \frac{\partial J}{\partial D}(D_0) \cdot \tau = \int_{D_0} \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial u}(u(D_0)) \cdot U(\tau) + \int_{\partial D_0} \langle n, \tau \rangle \mathcal{C}(u(D_0))$$

où $U(\tau)$ est solution du problème aux limites :

$$(1.20) \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial u}(u(D_0)) \cdot U(\tau) = 0 & \text{dans } D_0 \\ \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial u}(u(D_0)) \cdot U(\tau) + \langle n, \tau \rangle \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial n}(u(D_0)) = 0 & \text{sur } \partial D_0 \end{cases}$$

On note $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(u_0)$ la dérivée (quand elle existe) d'un opérateur \mathcal{L}

au point u_0 . C'est un opérateur linéaire qui se calcule par les règles de dérivation usuelles : par exemple

- si \mathcal{L} est linéaire, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(u_0) \cdot u = \mathcal{L}(u)$

- si $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2$ est un produit d'opérateurs,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(u_0) \cdot u = \left(\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial u}(u_0) \cdot u \right) \mathcal{L}_2(u_0) + \mathcal{L}_1(u_0) \left(\frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial u}(u_0) \cdot u \right).$$

Si l'état $u(D)$ est défini par plusieurs équations scalaires dans D ou sur ∂D , $U(\tau)$ est donc défini par le même nombre d'équations scalaires dans D_0 ou sur ∂D_0 , qu'on obtient en dérivant une à une les équations portant sur $u(D)$:

(1) Nous supposons ici que les opérateurs \mathcal{A} , \mathcal{B} et \mathcal{C} , qui sont donnés dans \mathbb{R}^N , ne dépendent pas du domaine D . Nous aborderons au paragraphe 1.5.3. le cas des conditions aux limites de Neumann.

en effet si $d = (d_1, \dots, d_r)$ est à valeurs vectorielles,

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u_0) = \left(\frac{\partial d_1}{\partial u}(u_0) \cdot u, \dots, \frac{\partial d_r}{\partial u}(u_0) \cdot u \right).$$

Quand la fonction coût est définie par (1.3) ou (1.4), sa dérivée est donnée en fonction de $U(\tau)$, solution de (1.20), par :

$$(1.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial J_1}{\partial D}(D_0) \cdot \tau = \int_{\partial D_0} \frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial u}(u(D_0)) \cdot U(\tau) \\ \quad + \int_{\partial D_0} \langle n, \tau \rangle \left\{ \frac{\partial}{\partial n} (\mathcal{E}_1(u(D_0))) + H \mathcal{E}_1(u(D_0)) \right\} \end{array} \right.$$

(où H est la courbure moyenne de ∂D_0 , dont on rappelle la définition au paragraphe 4.3.4.), ou par :

$$(1.22) \quad \frac{\partial J_2}{\partial D}(D_0) \cdot \tau = \int_A \frac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial u}(u(D_0)) \cdot U(\tau).$$

1.5.2. Méthode de démonstration.

i) Préliminaire . Considérons la fonction définie sur $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ par :

$$J(D) = \int_D \phi(D) \, dx$$

où $\phi(D) \in L^1(D)$ pour tout $D \in \mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$. Le transporté $\bar{\phi}_{D_0}$ de ϕ sur le domaine fixe D_0 , donné par :

$$\bar{\phi}_{D_0}(\theta) = \{ \phi((I + \theta)(D_0)) \} \circ (I + \theta),$$

est défini sur un voisinage de 0 de $W^{k,\sigma}(R^N, R^N)$ et est à valeurs dans $L^1(D_0)$.

En supposant l'application $\bar{\phi}_{D_0}$ dérivable de $W^{k,\sigma}(R^N, R^N)$ à valeurs dans $W^{1,1}(D_0)$ au point $0^{(1)}$, on obtient (par une démonstration analogue à celle du lemme 5.5) le résultat suivant :

(1) La méthode de démonstration exposée au paragraphe 1.4.3., et que nous utilisons dans ce travail, utilise une hypothèse plus faible : $\bar{\phi}_{D_0}$ dérivable à valeurs dans $L^1(D_0)$.

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout ouvert } A \text{ tel que } \bar{A} \subset D_0, \text{ l'application } D \rightarrow \phi(D)|_A \text{ est} \\ \text{dérivable (au sens de la définition (1.6)) de } \mathcal{D}_Q^{k,\sigma} \text{ dans } L^1(A) \\ \text{au point } D_0. \end{array} \right.$

Si on définit dans D_0 une "dérivée locale" (1) de ϕ par

$$\frac{\partial_{\text{loc}} \phi}{\partial D}(D_0) \cdot \tau = \frac{\partial(\phi(D)|_A)}{\partial D}(D_0) \cdot \tau \quad \text{dans } A$$

$$\forall A, \bar{A} \subset D_0, \quad \forall \tau \in W^{k,\sigma}(R^N, R^N),$$

il vient de plus :

$$\frac{\partial_{\text{loc}} \phi}{\partial D}(D_0) \cdot \tau = \frac{\partial \bar{\phi}_D}{\partial \theta}(0) \cdot \tau - \langle \text{grad } \phi(D_0), \tau \rangle$$

L'expression (1.16) de la dérivée de J donne alors :

$$\frac{\partial J}{\partial D}(D_0) \cdot \tau = \int_{D_0} \left\{ \frac{\partial_{\text{loc}} \phi}{\partial D}(D_0) \cdot \tau + \text{div}((\phi(D_0))\tau) \right\}$$

Quand D_0 est assez régulier, il vient :

$$(1.23) \quad \frac{\partial J}{\partial D}(D_0) \cdot \tau = \int_{D_0} \frac{\partial_{\text{loc}} \phi}{\partial D}(D_0) \cdot \tau + \int_{\partial D_0} \langle n, \tau \rangle \phi(D_0)$$

En supposant l'application $\bar{\phi}_D$ dérivable de $W^{k,\sigma}(R^N, R^N)$ dans $W^{2,1}(D_0)$ au point 0, on peut de même montrer (en utilisant le lemme 4.9) que la dérivée de la fonction

$$J_1(D) = \int_{\partial D} \phi(D) \, ds$$

est donnée par :

$$(1.24) \quad \frac{\partial J_1}{\partial D}(D_0) \cdot \tau = \int_{\partial D_0} \frac{\partial_{\text{loc}} \phi}{\partial D}(D_0) \cdot \tau + \int_{\partial D_0} \langle n, \tau \rangle \left\{ \frac{\partial(\phi(D_0))}{\partial n} + H \phi(D_0) \right\}$$

où H est la courbure moyenne de ∂D_0 .

(1) La fonction ϕ ne peut pas être dérivable au sens de la définition (1.6);

cette définition supposerait en effet que $\phi(D)$ appartienne à un espace fixe.

ii) Démonstration formelle . Supposons que le transporté \bar{u}_{D_0} , défini par (1.17), de l'état $u(D)$ sur le domaine fixe D_0 est dérivable dans un espace convenable, hypothèse qui est loisible⁽¹⁾.

Comme nous l'avons vu dans le préliminaire, $D \rightarrow u(D)|_A$ est alors dérivable. Supposons en outre l'opérateur \mathcal{A} dérivable, et dérivons l'équation

$$\mathcal{A}(u(D)|_A) = 0 \quad \text{dans } A$$

obtenue par restriction à A de l'équation (1.1). En utilisant un théorème de dérivation des applications composées, il vient :

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial u}(u(D_0)) \cdot \frac{\partial (u(D)|_A)}{\partial D}(D_0) \cdot \tau = 0 \quad \text{dans } A$$

c'est à dire

$$(1.25) \quad \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial u}(u(D_0)) \cdot \frac{\partial_{loc} u}{\partial D}(D_0) \cdot \tau = 0 \quad \text{dans } D_0.$$

Pour dériver la condition aux limites

$$\mathcal{B}(u(D)) = 0 \quad \text{sur } \partial D,$$

introduisons une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(R^N)$ et supposons l'opérateur \mathcal{B} dérivable.

Le résultat de dérivation (1.24), avec $\phi(D) = \varphi \mathcal{B}(u(D))$ donne de même :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\partial D_0} \varphi \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial u}(u(D_0)) \cdot \frac{\partial_{loc} u}{\partial D}(D_0) \cdot \tau + \\ + \int_{\partial D_0} \langle n, \tau \rangle \left\{ \varphi \frac{\partial \mathcal{B}(u(D_0))}{\partial n} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} + H \varphi \right) \mathcal{B}(u(D_0)) \right\} = 0 \end{array} \right.$$

Comme $\mathcal{B}(u(D_0)) = 0$ sur ∂D_0 et comme φ est quelconque, il vient

$$(1.26) \quad \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial n}(u(D_0)) \cdot \frac{\partial_{loc} u}{\partial D}(D_0) \cdot \tau + \langle n, \tau \rangle \frac{\partial \mathcal{B}(u(D_0))}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } \partial D_0$$

Enfin, si l'opérateur \mathcal{C} est dérivable, le résultat de dérivation

$$(1.23), \text{ avec } \phi(D) = \mathcal{C}(u(D)), \text{ donne :}$$

(1) Nous avons exposé au paragraphe 1.4.3 la méthode utilisée dans ce travail pour obtenir des résultats de dérivation de \bar{u}_{D_0} .

$$\left\{ \begin{aligned} 0 &= \int_{D_0} \left\{ \Delta \left(\frac{\partial_{loc} u}{\partial D} (D_0) \cdot \tau \right) \varphi + \langle \text{grad } \frac{\partial_{loc} u}{\partial D} (D_0) \cdot \tau, \text{grad } \varphi \rangle \right\} \\ &+ \int_{\partial D_0} \langle n, \tau \rangle \left\{ \Delta u(D_0) \varphi + \langle \text{grad } u(D_0), \text{grad } \varphi \rangle \right\} \\ &- \int_{\partial D_0} \langle n, \tau \rangle \left\{ \frac{\partial}{\partial n} (g \varphi) + H g \varphi \right\} \end{aligned} \right.$$

d'où :

$$(1.28) \left\{ \begin{aligned} &\int_{\partial D_0} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial_{loc} u}{\partial D} (D_0) \cdot \tau \right) \varphi + \\ &\int_{\partial D_0} \langle n, \tau \rangle \left\{ \Delta u(D_0) \varphi + \langle \text{grad } u(D_0), \text{grad } \varphi \rangle + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial n} (g \varphi) + H g \varphi \right\} = 0 \end{aligned} \right.$$

En utilisant des résultats d'intégration par partie sur le bord,

il vient (cf. lemme 6.2)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial_{loc} u}{\partial D} (D_0) \cdot \tau \right) &= \langle n, ([\tau'] + {}^c[\tau']) \text{grad } u(D_0) \rangle + \langle \text{grad } g, \tau \rangle \\ &- g \langle [\tau'] n, n \rangle - \frac{\partial}{\partial n} (\langle \text{grad } u(D_0), \tau \rangle). \end{aligned}$$

Nous ne savons pas mettre cette expression sous une forme plus parlante. Quand nous traiterons les conditions aux limites de Neumann, ce ne sera pas elle, mais (1.28) qui nous guidera dans les démonstrations.

$$(1.27) \quad \frac{\partial J}{\partial D}(D_0) \cdot \tau = \int_{D_0} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u}(u(D_0)) \cdot \frac{\partial_{loc} u}{\partial D}(D_0) \cdot \tau + \int_{\partial D_0} \langle n, \tau \rangle \mathcal{E}(u(D_0))$$

Cela démontre les résultats (1.19) et (1.20), et on remarque que $U(\tau)$ est la "dérivée locale" de $u(D)$. Le résultat (1.21) s'obtient en utilisant (1.24) et le résultat (1.22) est immédiat.

1.5.3. Commentaire.

i) Les hypothèses de régularité que nous ferons dans ce travail sont en général trop faibles pour permettre d'utiliser cette méthode ⁽¹⁾. La méthode que nous développons n'utilise donc pas la notion de dérivée locale. Cependant celle-ci existe, et la méthode formelle nous guidera dans les démonstrations.

ii) Condition aux limites de Neumann. Considérons la condition aux limites :

$$\mathfrak{B}(u(D)) = \frac{\partial u(D)}{\partial n} - g = \langle n(D), \text{grad } u(D) \rangle - g = 0 \quad \text{sur } \partial D.$$

L'opérateur \mathfrak{B} dépend ici du domaine D , et le résultat de dérivation (1.26) n'est plus valable. Nous allons cependant adapter la méthode exposée au paragraphe 1.5.2. pour obtenir l'équation aux limites portant sur la dérivée locale de u .

Etant donné $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, nous avons d'après la formule de Green

$$0 = \int_{\partial D} \left(\frac{\partial u(D)}{\partial n} - g \right) \varphi = \int_D \{ \Delta u(D) \varphi + \langle \text{grad } u(D), \text{grad } \varphi \rangle \} - \int_{\partial D} g \varphi$$

En supposant le transporté \bar{u}_D de l'état sur le domaine fixe D_0 dérivable, les

résultats (1.23) et (1.24) permettent de dériver cette expression :

(1) Comme nous l'avons indiqué, cette méthode nécessite que $\bar{\phi}_D$ soit dérivable à valeurs dans $W^{1,1}(D_0)$, alors que nous supposerons seulement $\bar{\phi}_D$ dérivable à valeurs dans $L^1(D_0)$, ce qui nécessite bien sûr des hypothèses de régularité moins fortes.

II - CONSTRUCTION ET PROPRIETES METRIQUES D'ESPACES DE DOMAINES.

2.0. INTRODUCTION

L'objet de ce chapitre est de construire des espaces de domaines munis d'une structure d'espace métrique complet. Nous les munirons d'une structure différentielle au chapitre III et on aura ainsi un cadre fonctionnel dans lequel on résoudra dans les chapitres ultérieurs des problèmes de contrôle par un domaine.

Nous allons donc dans ce chapitre introduire des espaces de domaines de \mathbb{R}^N : étant donné Q un domaine de \mathbb{R}^N , k un entier et σ un indice à deux valeurs, on définira

$$\mathcal{D}_Q^{k,\sigma} = \{T(Q), T \in \mathcal{C}^{k,\sigma}\}$$

où $\mathcal{C}^{k,\sigma}$ est un espace de difféomorphismes de \mathbb{R}^N réguliers d'ordre k .

Nous commencerons par étudier quelques propriétés de la composition des applications dans les espaces $W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ et dans d'autres espaces, notés $\mathcal{V}^{k,\sigma}$, d'applications régulières de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R}^N , et nous étudierons les espaces $\mathcal{C}^{k,\sigma}$ de difféomorphismes.

Nous montrerons ensuite que les espaces $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ sont des espaces homogènes et nous les munirons d'une structure d'espace métrique complet, structure qui sera définie par ce qu'on appellera une pseudo distance (application définie comme une distance en affaiblissant l'inégalité triangulaire), qui sera mieux adaptée aux calculs qu'une distance.

Enfin nous rappellerons quelques définitions de régularité (du bord) d'un domaine et nous étudierons dans quelle mesure les domaines de $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ sont réguliers si Q l'est. Si Q est régulier, nous nous poserons la question de savoir si $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ est l'ensemble des domaines réguliers homéomorphes à Q .

Les démonstrations de ce chapitre sont souvent techniques et ne sont pas nécessaires à la compréhension des résultats ultérieurs. On suggère au lecteur de les sauter en première lecture pour en arriver plus rapidement aux résultats spécifiques du contrôle par un domaine.

On suivra le plan :

- 2.1. Définition des espaces $\mathcal{C}^{k,\sigma}$ de difféomorphismes de \mathbb{R}^N .
- 2.2. Notations et résultats matriciels.
- 2.3. Propriétés de la composition des applications dans les espaces d'applications régulières $\mathcal{V}^{k,\sigma}$.
- 2.4. Pseudo-distance et propriétés métriques des espaces de difféomorphismes $\mathcal{C}^{k,\sigma}$.
- 2.5. Propriétés algébriques et propriétés métriques des espaces de domaines $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$.
- 2.6. Compléments sur les espaces de domaines $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$.
- 2.7. Domaines à bord régulier.

2.1. DEFINITIONS DES ESPACES $\mathcal{C}^{k,\sigma}$ DE DIFFÉOMORPHISMES DE \mathbb{R}^N .

Nous allons dans ce paragraphe définir les espaces $W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ et $\mathcal{V}^{k,\sigma}$ d'applications régulières de \mathbb{R}^N dans lui-même, et les espaces $\mathcal{E}^{k,\sigma}$ de difféomorphismes à partir desquels on construira les espaces de domaines. On en étudiera les propriétés aux paragraphes 2.3 et 2.4.

Etant donné $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ où $\alpha_i \in \mathbb{N}$, et $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$, on note

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_N}} \quad (\text{Par convention } D^{(0, \dots, 0)} \text{ est l'opérateur identité})$$

On note $L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ l'espace des applications mesurables bornées de \mathbb{R}^N dans lui-même, et $\bar{\mathcal{C}}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ l'espace des applications uniformément continues de \mathbb{R}^N dans lui-même (non nécessairement bornées).

Etant donné k entier, $k \geq 0$, on note

$$W^{k,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) = \{ \varphi \mid D^\alpha \varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \quad \forall \alpha, \quad 0 \leq |\alpha| \leq k \}$$

$$W^{k,\bar{c}}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) = \{ \varphi \mid D^\alpha \varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \cap \bar{\mathcal{C}}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \quad \forall \alpha, \quad 0 \leq |\alpha| \leq k \}$$

les dérivées étant prises au sens des distributions.

On notera dorénavant σ un indice pouvant être égal à ∞ ou à \bar{c} .

On note I l'application identité de \mathbb{R}^N , $I(x) = x$, et on définit pour k entier ≥ 0 et $\sigma = \infty$ ou \bar{c} , des espaces affines d'applications régulières de \mathbb{R}^N dans lui-même :

$$\mathcal{V}^{k,\sigma} = \{ \varphi \mid \varphi \text{ application de } \mathbb{R}^N \text{ dans lui-même} \quad \varphi - I \in W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \}$$

Notons $\|x\|_{\mathbb{R}^N} = \left(\sum_{i=1}^N |x_i|^2 \right)^{1/2}$ la norme de \mathbb{R}^N ; l'espace $W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ est un espace de Banach pour la norme

$$\|\varphi\|_k = \text{Sup ess}_{x \in \mathbb{R}^N} \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} |D^\alpha \varphi(x)|_{\mathbb{R}^N}^2 \right)^{1/2}$$

et $\mathcal{V}^{k,\sigma}$ est alors un espace affine normé complet construit sur $W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$.

On a, étant donné $k \geq 0$,

$$\mathcal{V}^{k+1, \infty} \subset \mathcal{V}^{k, \bar{c}} \subset \mathcal{V}^{k, \infty} \quad \text{les injections étant continues.}$$

REMARQUE 2.1.

On a, pour $k \geq 1$ et $\sigma = \infty$ ou \bar{c} ,

$$\mathcal{V}^{k, \sigma} = \{ \varphi \mid \varphi - I \in L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \text{ et } D^\alpha \varphi \in W^{0, \sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \quad \forall \alpha \quad 1 \leq |\alpha| \leq k \}$$

On utilisera parfois la caractérisation suivante, qui résulte par exemple du théorème 2.2.2. de NECAS [1], ou de DENY-LIONS [1], pour $k \geq 1$

$$\mathcal{V}^{k, \infty} = \{ \varphi \mid \varphi - I \in L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \text{ et } D^\alpha \varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \\ \sup_{x, y \in \mathbb{R}^N} \frac{|(D^\alpha \varphi)(y) - (D^\alpha \varphi)(x)|_R}{|y-x|_R} < \infty \quad \forall \alpha, 0 \leq |\alpha| \leq k-1 \} \quad \blacksquare$$

Enfin, étant donné k entier ≥ 0 et $\sigma = \infty$ ou \bar{c} , on définit des espaces de difféomorphismes de \mathbb{R}^N :

$$\mathcal{C}^{k, \sigma} = \{ T \mid T \text{ est une bijection de } \mathbb{R}^N, T \in \mathcal{V}^{k, \sigma} \text{ et } T^{-1} \in \mathcal{V}^{k, \sigma} \}$$

Notons que les espaces $\mathcal{C}^{k, \sigma}$ ne sont pas vides car ils contiennent l'identité I de \mathbb{R}^N ; par contre l'espace

$$\{ T \mid T \text{ est une bijection de } \mathbb{R}^N, T \in W^{k, \sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \text{ et } T^{-1} \in W^{k, \sigma}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N) \}$$

est vide.

2.2. NOTATIONS ET RESULTATS MATRICIELS

Nous allons dans ce paragraphe introduire des espaces de matrices et donner quelques résultats techniques qui nous permettront, dans les paragraphes suivants, d'obtenir des propriétés de certains homéomorphismes.

D'une façon générale, on notera entre crochets les matrices carrées d'ordre N , i.e.

$[M] = \{M_{i,j}, i, j = 1 \dots N\}$ où $M_{i,j}$ est réel, ou est une fonction à valeurs réelles.

On désignera par $[I]$, où $I_{i,i} = 1, I_{i,j} = 0$ si $i \neq j$, la matrice unité.

Etant donné k entier, $k \geq 0$, on définit les espaces de matrices $W^{k,\infty}(R^N, R^{2N}) = \{[M] \mid D^\alpha M_{i,j} \in L^\infty(R^N) \quad \forall \alpha, 0 \leq |\alpha| \leq k\}$

$W^{k,\bar{c}}(R^N, R^{2N}) = \{[M] \mid D^\alpha M_{i,j} \in L^\infty(R^N) \cap \bar{\mathcal{C}}(R^N) \quad \forall \alpha, 0 \leq |\alpha| \leq k\}$

qu'on munit de la norme

$$|[M]|_k = \sup_{x \in R^N} \left(\sum_{\substack{0 \leq |\alpha| \leq k \\ i,j=1 \dots N}} \left| \frac{1}{\alpha!} D^\alpha M_{i,j}(x) \right| \right)$$

où $\alpha! = \alpha_1! \times \dots \times \alpha_N!$

PROPOSITION 2.1.

Les espaces $W^{k,\sigma}(R^N, R^{2N})$ où $k \geq 0$ et $\sigma = \infty$ ou \bar{c} , munis de la norme $| \cdot |_k$ sont des algèbres de Banach avec unité $[I]$, pour l'addition et la multiplication matricielle. ■

Ce résultat est classique; pour la norme choisie on a

(2.1) $|[I]|_k = N$

(2.2) $|[A] \times [B]|_k \leq |[A]|_k \times |[B]|_k$.

Il en résulte la

PROPOSITION 2.2.

Soit $[M] \in W^{k,\sigma}(R^N, R^{2N})$, où $k \geq 0$ et $\sigma = \infty$ ou \bar{c} , vérifiant $|[M]|_k < 1$.

Alors $[I] - [M]$ est inversible (au sens des matrices) dans $W^{k,\sigma}(R^N, R^{2N})$ et on a :

$$(2.3) \quad ([I] - [M])^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} [M]^n$$

$$(2.4) \quad |([I] - [M])^{-1}|_k \leq N-1 + \frac{1}{1 - |[M]|_k}$$

$$(2.5) \quad |([I] - [M])^{-1} - [I]|_k \leq \frac{|[M]|_k}{1 - |[M]|_k} \quad \blacksquare$$

On note par convention $[M]^0 = [I]$, la majoration (2.4) n'est pas exactement la majoration usuelle dans une algèbre de Banach puisque, Cf (2.1),

$$|[M]^0|_k = N$$

Etant donné φ une application de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R}^N , on note sa matrice dérivée

$$[\varphi'] = \{(\varphi')_{i,j} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}, \quad i, j = 1 \dots N\}$$

On a $\varphi \in W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, où $k \geq 1$ et $\sigma = \infty$ ou \bar{c} si et seulement si

$[\varphi'] \in W^{k-1,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{2N})$ et $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$; on a alors les inégalités

$$(2.6) \quad \begin{cases} \|\varphi\|_k \leq (k-1)! |[\varphi']|_{k-1} + \|\varphi\|_0 & \forall k \geq 1 \\ |[\varphi']|_{k-1} \leq \sqrt{k N^{k+3}} \cdot \|\varphi\|_k \end{cases}$$

LEMME 2.1.

Etant donnés $\varphi, \psi \in \mathcal{V}^{1,\sigma}$, où $\sigma = \infty$ ou \bar{c} , avec de plus $\psi \in \mathcal{C}^{1,\infty}$ si $\sigma = \infty$, alors $\varphi \circ \psi \in \mathcal{V}^{1,\sigma}$ et

$$(2.7) \quad [(\varphi \circ \psi)'] = ([\varphi'] \circ \psi) \times [\psi'] \quad \text{presque partout dans } \mathbb{R}^N \quad \blacksquare$$

DEMONSTRATION DU LEMME 2.1.

a) Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{V}^{1,\bar{c}} \subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$; il est classique que $\varphi \circ \psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N)$ et

$$(2.8) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} (\varphi \circ \psi) = \sum_{m=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial x_m} \varphi \right) \circ \psi \times \frac{\partial}{\partial x_i} \psi_m$$

égalité qui établit (2.7).

L'égalité (2.8) montre de plus que $\frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi \circ \Psi) \in L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \forall i$,
 et en écrivant $\varphi \circ \Psi^{-1} = (\varphi^{-1}) \circ \Psi + \Psi^{-1}$ on obtient que $\varphi \circ \Psi^{-1} \in L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$
 et la remarque 2.1. donne $\varphi \circ \Psi \in \mathcal{V}^{1, \bar{c}}$.

b) Soient $\varphi, \Psi \in \mathcal{V}^{1, \infty}$; on a vu, cf. Remarque 2.1. que $\mathcal{V}^{1, \infty}$ est l'espace des fonctions f lipschitziennes de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R}^N tel que $f-I$ soit borné, de sorte que $\varphi \circ \Psi \in \mathcal{V}^{1, \infty}$ et (2.8) est vérifiée en tout point x de \mathbb{R}^N tel que $\frac{\partial \Psi_m}{\partial x_i}(x)$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial x_m}(\Psi(x))$ soient définis. Par définition de $\mathcal{V}^{1, \infty}$ les fonctions φ et Ψ sont dérivables dans $\mathbb{R}^N - Z$, où $\text{mes}(Z) = 0$, de sorte que (2.7) est vérifiée dans $\mathbb{R}^N - (Z \cup \Psi^{-1}(Z))$, donc presque partout dans \mathbb{R}^N si $\Psi \in \mathcal{C}^{1, \infty}$ car alors Ψ^{-1} est lipschitzienne, et $\text{mes} \Psi^{-1}(Z) = 0$ d'après le lemme de Vitali. ■

En prenant $\psi = \varphi^{-1}$, on déduit du lemme 2.1. le :

COROLLAIRE 2.1.

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^{k, \sigma}$ où $k \geq 1$ et $\sigma = \infty$ ou \bar{c} ; on a l'égalité matricielle

$$[(\varphi^{-1})'] = [\varphi']^{-1} \circ \varphi^{-1} \quad \text{presque partout dans } \mathbb{R}^N \quad \blacksquare$$

REMARQUE 2.2.

Dans l'énoncé du lemme 2.1. on a supposé que $\Psi \in \mathcal{C}^{1, \infty}$ quand $\sigma = \infty$. On sera souvent amené à faire une hypothèse analogue quand on composera des applications. En effet pour que $\phi \circ \Psi$ soit défini et mesurable, il suffit si ϕ est continue ($\sigma = \bar{c}$) que Ψ soit mesurable. Mais si ϕ est seulement mesurable ($\sigma = \infty$) il faut une hypothèse plus forte sur Ψ : le lemme de Vitali montre que l'hypothèse $\Psi \in \mathcal{C}^{1, \infty}$ est suffisante. ■

2.3. PROPRIETES DE LA COMPOSITION DES APPLICATIONS DANS LES ESPACES D'APPLICATIONS REGULIERES $\mathcal{V}^{k, \sigma}$.

La composition des applications est stable et associative dans les espaces $\mathcal{V}^{k, \sigma}$, mais elle n'est pas distributive (à droite) par rapport à l'addition, de sorte qu'on ne peut obtenir ainsi une structure d'algèbre de Banach. Nous allons montrer dans ce paragraphe qu'on a cependant des propriétés voisines de celles d'une algèbre de Banach :

- majoration de la composée de deux applications,
- inversibilité des éléments voisins de l'élément neutre.

2.3.1. Propriétés de continuité et majoration de la composée de deux applications.

LEMME 2.2.

i) Soient $\varphi \in W^{k,\sigma}(R^N, R^N)$, $\psi \in \mathcal{U}^{k,\sigma}$, où $k \geq 0$ et $\sigma = \infty$, ou \bar{c} ; si $\sigma = \infty$ on suppose de plus $\psi \in \mathcal{C}^{1,\infty}$, alors $\varphi \circ \psi \in W^{k,\sigma}(R^N, R^N)$ et

$$(2.9) \quad \begin{cases} \|\varphi \circ \psi\|_k \leq \|\varphi\|_k (1 + \beta_k \|\psi - I\|_k (1 + \|\psi - I\|_k)^{k-1}), & \text{si } k \geq 1, \text{ où } \beta_k > 0 \\ \|\varphi \circ \psi\|_0 \leq \|\varphi\|_0 \end{cases}$$

ii) Soient $\varphi \in \mathcal{U}^{k,\sigma}$ et $\psi \in \mathcal{U}^{k,\sigma}$, où $k \geq 0$ et $\sigma = \infty$ ou \bar{c} ; si $\sigma = \infty$ on suppose de plus $\psi \in \mathcal{C}^{1,\infty}$; alors $\varphi \circ \psi \in \mathcal{U}^{k,\sigma}$ et l'application $\psi \rightarrow \varphi \circ \psi$ est affine continue de $\mathcal{U}^{k,\sigma}$ dans lui-même.

iii) Soit $\varphi \in \mathcal{U}^{k,\bar{c}}$ où $k \geq 0$; l'application $\psi \rightarrow \varphi \circ \psi$ est continue de $\mathcal{U}^{k,\bar{c}}$ dans lui-même.

iv) Soit $k \geq 0$, l'application $\psi \rightarrow \varphi \circ \psi$ définie sur $\mathcal{U}^{k,\infty} \cap \mathcal{C}^{1,\infty}$ est continue de $\mathcal{U}^{k,\infty}$ dans lui-même si et seulement si $\varphi \in \mathcal{U}^{k,\bar{c}}$.

v) Soit $\varphi \in W^{k+1,\infty}(R^N, R^N)$, où $k \geq 0$; l'application $\psi \rightarrow \varphi \circ \psi$ est localement lipschitzienne de $\mathcal{U}^{k,\sigma}$ dans $W^{k,\sigma}(R^N, R^N)$, et pour tout $\psi, \psi_\star \in \mathcal{U}^{k,\sigma}$

$$\|\varphi \circ \psi - \varphi \circ \psi_\star\|_k \leq \gamma_k \|\varphi\|_{k+1} \|\psi - \psi_\star\|_k (1 + \|\psi - I\|_k + \|\psi_\star - I\|_k)^k \quad \text{où } \gamma_k > 0.$$

vi) Soit $\varphi \in \mathcal{U}^{k+1,\infty}$, où $k \geq 0$; l'application $\psi \rightarrow \varphi \circ \psi$ est localement lipschitzienne de $\mathcal{U}^{k,\sigma}$ dans lui-même, et pour tout $\psi, \psi_\star \in \mathcal{U}^{k,\sigma}$,

$$\|\varphi \circ \psi - \varphi \circ \psi_\star\|_k \leq \|\varphi\|_{k+1} (1 + \gamma_k \|\varphi - I\|_{k+1} (1 + \|\psi - I\|_k + \|\psi_\star - I\|_k)^k) \quad \blacksquare$$

REMARQUE 2.3.

En choisissant $\beta_k \geq 1$, (2.9) donne

$$(2.9)\text{bis} \quad \|\varphi \circ \psi\|_k \leq \beta_k \|\varphi\|_k (1 + \|\psi - I\|_k)^k$$

Une telle majoration, suffisante pour la plupart des résultats, est plus facile à établir que (2.9); mais elle ne suffit pas pour démontrer dans les théorèmes 2.1 et 2.2 que δ_k et $d_{k,\sigma}$ sont des pseudo-distances.

DEMONSTRATION DU LEMME 2.2.

On démontre que $\varphi \circ \Psi \in W^{k,\sigma}(R^N, R^N)$, ou $\mathcal{V}^{k,\sigma}$ selon les cas, en utilisant le même argument qu'au lemme 2.1 et, cela étant, on va établir la majoration (2.9) et les propriétés de continuité :

a) Une formule de dérivation d'ordre quelconque d'une application composée.

Etant donnés h entier > 1 et μ_1, \dots, μ_h des indices tels que $1 \leq \mu_1 \leq N, \dots, 1 \leq \mu_h \leq N$, on peut écrire

$$(2.10) \quad \frac{\partial}{\partial x_{\mu_h}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{\mu_1}} (\varphi \circ \Psi) = \sum_{1 \leq \ell \leq h} \sum_{\substack{m_1=1 \dots N \\ \dots \\ m_\ell=1 \dots N}} \left(\frac{\partial}{\partial x_{m_\ell}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{m_1}} \varphi \right) \circ \Psi \times P_{(\mu_1, \dots, \mu_h)}(m_1, \dots, m_\ell)$$

où les $P_{(\mu_1, \dots, \mu_h)}(m_1, \dots, m_\ell)$ sont des polynômes réels en les dérivées de Ψ , qu'on va caractériser .

Le résultat de dérivation des applications composées (2.8) montre, pour $h = 1$, que

$$(2.11) \quad P_{(\mu_1)}(m_1) = \frac{\partial \Psi_{m_1}}{\partial x_{\mu_1}} ;$$

étant donné $h > 1$, écrivons (2.10) pour $h-1$ et dérivons par rapport à x_{μ_h} ; en utilisant (2.8) il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_{\mu_h}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{\mu_1}} (\varphi \circ \Psi) = & \sum_{1 \leq \ell \leq h-1} \sum_{\substack{m_1=1 \dots N \\ \dots \\ m_\ell=1 \dots N}} \left\{ \sum_{m=1 \dots N} \left(\frac{\partial}{\partial x_m} \frac{\partial}{\partial x_{m_\ell}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{m_1}} \varphi \right) \circ \Psi \times \frac{\partial \Psi_m}{\partial x_{\mu_h}} \times P_{(\mu_1, \dots, \mu_{h-1})}(m_1, \dots, m_\ell) \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial}{\partial x_{m_\ell}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{m_1}} \varphi \right) \circ \Psi \times \frac{\partial}{\partial x_{\mu_h}} P_{(\mu_1, \dots, \mu_{h-1})}(m_1, \dots, m_\ell) \right\} \end{aligned}$$

et en comparant à (2.10) on obtient les formules de récurrence :

$$(2.12) \quad P_{(\mu_1, \dots, \mu_h)}(m_1) = \frac{\partial}{\partial x_{\mu_h}} P_{(\mu_1, \dots, \mu_{h-1})}(m_1) \quad \ell = 1$$

$$(2.13) \quad \left\{ \begin{aligned} P_{(\mu_1, \dots, \mu_h)}(m_1, \dots, m_\ell) &= \frac{\partial}{\partial x_{\mu_h}} P_{(\mu_1, \dots, \mu_{h-1})}(m_1, \dots, m_\ell) \\ &+ \frac{\partial \psi_{m_\ell}}{\partial x_{\mu_h}} \times P_{(\mu_1, \dots, \mu_{h-1})}(m_1, \dots, m_{\ell-1}) \end{aligned} \right. \quad 1 < \ell < h$$

$$(2.14) \quad P_{(\mu_1, \dots, \mu_h)}(m_1, \dots, m_h) = \frac{\partial \psi_{m_h}}{\partial x_{\mu_h}} \times P_{(\mu_1, \dots, \mu_{h-1})}(m_1, \dots, m_{h-1}) \quad \ell = h$$

Les formules (2.12) et (2.14), jointes à la donnée initiale (2.11), montrent que

$$(2.15) \quad P_{(\mu_1, \dots, \mu_h)}(m_1) = \frac{\partial^h \psi_{m_1}}{\partial x_{\mu_h} \dots \partial x_{\mu_1}}$$

$$(2.16) \quad P_{(\mu_1, \dots, \mu_h)}(m_1, \dots, m_h) = \frac{\partial \psi_{m_1}}{\partial x_{\mu_1}} \dots \frac{\partial \psi_{m_h}}{\partial x_{\mu_h}}$$

et la formule (2.13) permet de montrer par récurrence que $P_{(\mu_1, \dots, \mu_h)}(m_1, \dots, m_\ell)$ est un polynôme homogène de degré ℓ en les $D^{\beta} \psi_m$ pour $1 \leq m \leq N$, $1 \leq |\beta| \leq h - \ell + 1 (\leq h)$.

b) Démonstration de la majoration (2.9)

On va étudier les polynômes $P_{(\mu_1, \dots, \mu_h)}(m_1, \dots, m_\ell)$:

Quand $\ell = h$ on écrit (2.16) sous la forme

$$P_{(\mu_1, \dots, \mu_h)}(m_1, \dots, m_h) = \left(\frac{\partial}{\partial x_{\mu_1}} (\psi - I)_{m_1 - \varepsilon_{\mu_1, m_1}} \right) \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_{\mu_h}} (\psi - I)_{m_h + \varepsilon_{\mu_h, m_h}} \right)$$

car $\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} (I)_m = \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} x_m = \varepsilon_{m, \mu} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = \mu \\ 0 & \text{si } m \neq \mu \end{cases}$

En développant ce produit on peut l'écrire :

$$(2.17) \quad \left\{ \begin{aligned} P_{(\mu_1, \dots, \mu_h)}(m_1, \dots, m_h) &= \delta_{\mu_1, m_1} \times \dots \times \delta_{\mu_h, m_h} + \\ &+ \sum_{\substack{|\beta|=1 \\ 1 \leq m \leq N}} D^\beta(\Psi-I)_m \times R_{(\mu_1, \dots, \mu_h), (m_1, \dots, m_h), \beta, m} \end{aligned} \right.$$

où $R_{(\mu_1, \dots, \mu_h), (m_1, \dots, m_h), \beta, m}$ est un polynôme réel non homogène de degré compris entre 0 et $h-1$ en les $\frac{\partial}{\partial x_\mu}(\Psi-I)_m$, pour $\mu=1, \dots, N$, $m=1, \dots, N$.

Quand $1 \leq \ell < h$

La formule (2.13) jointe à (2.15) permet de montrer par récurrence que tout monôme de $P_{(\mu_1, \dots, \mu_h)}(m_1, \dots, m_\ell)$ contient au moins une dérivée de Ψ d'ordre supérieur ou égal à 2, c'est à dire un élément qu'on peut écrire ainsi

$$D^\beta \Psi_m = D^\beta(\Psi-I)_m \quad \text{où} \quad 2 \leq |\beta| \leq h, \quad 1 \leq m \leq N$$

et on peut donc écrire

$$P_{(\mu_1, \dots, \mu_h)}(m_1, \dots, m_\ell) = \sum_{\substack{2 \leq |\beta| \leq h \\ 1 \leq m \leq N}} D^\beta(\Psi-I)_m \times R_{(\mu_1, \dots, \mu_h), (m_1, \dots, m_\ell), \beta, m}$$

où $R_{(\mu_1, \dots, \mu_h), (m_1, \dots, m_\ell), \beta, m}$ est un polynôme homogène de degré $\ell-1$ en les $D^\beta \Psi_m$, donc un polynôme non homogène de degré compris entre 0 et $\ell-1$ en les $D^\beta(\Psi-I)_m$, pour $1 \leq m \leq N$, $1 \leq |\beta| \leq h-\ell+1$ ($\leq h$)

Ce résultat joint à (2.17) permet de réécrire la formule (2.10) ainsi :

$$(2.18) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_{\mu_h}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{\mu_1}} (\varphi \circ \Psi) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_{\mu_h}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{\mu_1}} \varphi \right) \circ \Psi + \\ &+ \sum_{1 \leq \ell \leq h} \sum_{m_1=1 \dots N} \sum_{\substack{1 \leq |\beta| \leq h \\ 1 \leq m \leq N}} \left(\frac{\partial}{\partial x_{\mu_\ell}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{\mu_1}} \varphi \right) \circ \Psi \times D^\beta(\Psi-I)_m \times R_{(\mu_1, \dots, \mu_h), (m_1, \dots, m_\ell), \beta, m} \end{aligned} \right.$$

Etant donné k entier ≥ 1 , on peut majorer, partout ou presque partout dans \mathbb{R}^N , pour $1 \leq \ell \leq h \leq k$, $|\beta| \leq h$,

$$\begin{aligned} |R_{(\mu_1, \dots, \mu_h)(m_1, \dots, m_\ell), \beta, m}|_{\mathbb{R}^N} &\leq \sum_{0 \leq \lambda \leq \ell} c_\lambda \left(\sum_{1 \leq |\beta| \leq h-\ell+1} |D^\beta(\Psi-I)|_{\mathbb{R}^N}^2 \right)^{\frac{\lambda-1}{2}} \leq \\ &\leq c_k \left(1 + \left(\sum_{1 \leq |\beta| \leq k} |D^\beta(\Psi-I)|_{\mathbb{R}^N}^2 \right)^{1/2} \right)^{k-1} \leq c_k (1 + \|\Psi-I\|_k)^{k-1} \end{aligned}$$

et $\forall \alpha$, $1 \leq |\alpha| \leq k$, (2.18) permet de majorer

$$\begin{aligned} |D^\alpha(\varphi \circ \Psi)|_{\mathbb{R}^N} &\leq |(D^\alpha \varphi) \circ \Psi|_{\mathbb{R}^N} + c'_k \left(\sum_{1 \leq |\beta| \leq k} |D^\beta \varphi|_{\mathbb{R}^N}^2 \right)^{1/2} \cdot \Psi \times \\ &\times \left(\sum_{1 \leq |\beta| \leq k} |D^\beta(\Psi-I)|_{\mathbb{R}^N}^2 \right)^{1/2} (1 + \|\Psi-I\|_k)^{k-1} \end{aligned}$$

En prenant la racine de la somme [pour $0 \leq |\alpha| \leq k$] des carrés des deux membres de cette inégalité, et en utilisant l'inégalité triangulaire il vient

$$\|\varphi \circ \Psi\|_k \leq \|\varphi\|_k + \beta_k \|\varphi\|_k \|\Psi-I\|_k (1 + \|\Psi-I\|_k)^{k-1}$$

c) Démonstration de ii)

L'application $\varphi \rightarrow \varphi \circ \Psi$, Ψ convenable, est linéaire de $W^{k, \sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ dans lui-même et continue d'après (2.9). L'application $\varphi \rightarrow \varphi \circ \Psi$ est donc affine continue de $\mathcal{U}^{k, \sigma}$ dans lui-même.

d) Continuité dans $\mathcal{U}^{k, \sigma}$ de l'application $\Psi \rightarrow \varphi \circ \Psi$, pour $\varphi \in \mathcal{U}^{k, \bar{c}}$

Soient $\varphi \in \mathcal{U}^{k, \bar{c}}$ et $\Psi, \Psi_\star \in \mathcal{U}^{k, \sigma}$; soustrayons les égalités (2.10) relatives à Ψ et Ψ_\star ; en notant $\mathcal{P}_{(\mu_1, \dots, \mu_h)(m_1, \dots, m_\ell)}$ l'opérateur différentiel défini par $\mathcal{P}_{(\mu_1, \dots, \mu_h)(m_1, \dots, m_\ell)}(\Psi) = P_{(\mu_1, \dots, \mu_h)(m_1, \dots, m_\ell)}$, il vient :

$$(2.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x_{\mu_h}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{\mu_1}} (\varphi \circ \Psi - \varphi \circ \Psi_*) = \\ \sum_{1 \leq \ell \leq h} \sum_{\substack{m_1=1 \dots N \\ \dots \\ m_\ell=1 \dots N}} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_{m_\ell}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{m_1}} \varphi \right) \circ \Psi \times \mathcal{P}_{(\mu_1, \dots, \mu_h)}(m_1, \dots, m_\ell)^{(\Psi)} - \mathcal{P}_{(\mu_1, \dots, \mu_h)}(m_1, \dots, m_\ell)^{(\Psi_*)} \right\} \\ + \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_{m_\ell}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{m_1}} \varphi \right) \circ \Psi - \left(\frac{\partial}{\partial x_{m_\ell}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{m_1}} \varphi \right) \circ \Psi_* \right] \times \mathcal{P}_{(\mu_1, \dots, \mu_h)}(m_1, \dots, m_\ell)^{(\Psi_*)} \end{array} \right.$$

$\mathcal{P}_{(\mu_1, \dots, \mu_h)}(m_1, \dots, m_\ell)$ étant un opérateur différentiel d'ordre $h-\ell+1$ et de degré ℓ ,

on a partout ou presque partout dans \mathbb{R}^N , pour $1 \leq \ell \leq h \leq k$,

$$\begin{aligned} & \left| \mathcal{P}_{(\mu_1, \dots, \mu_h)}(m_1, \dots, m_\ell)^{(\Psi)} - \mathcal{P}_{(\mu_1, \dots, \mu_h)}(m_1, \dots, m_\ell)^{(\Psi_*)} \right| \leq \\ & \leq C_1 \left(\sum_{1 \leq |\alpha| \leq k} |D^\alpha (\Psi - \Psi_*)|_{R^N}^2 \right)^{1/2} \text{Sup} \left\{ \left(\sum_{1 \leq |\alpha| \leq k} |D^\alpha \Psi|_{R^N}^2 \right)^{1/2} ; \left(\sum_{1 \leq |\alpha| \leq k} |D^\alpha \Psi_*|_{R^N}^2 \right)^{1/2} \right\}^{\ell-1} \\ & \leq C_2 \|\Psi - \Psi_*\|_k (1 + \|\Psi - I\|_k + \|\Psi_* - I\|_k)^{k-1} \end{aligned}$$

(2.19) permet donc de majorer presque partout dans \mathbb{R}^N

$$(2.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} |D^\alpha (\varphi \circ \Psi - \varphi \circ \Psi_*)|_{R^N}^2 \right)^{1/2} \leq \\ \leq C_3 \left(\sum_{1 \leq |\alpha| \leq k} |D^\alpha \varphi|^2 \right)^{1/2} \cdot \Psi \times \|\Psi - \Psi_*\|_k (1 + \|\Psi - I\|_k + \|\Psi_* - I\|_k)^{k-1} + \\ + C_4 \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} |(D^\alpha \varphi) \circ \Psi - (D^\alpha \varphi) \circ \Psi_*|_{R^N}^2 \right)^{1/2} \times (1 + \|\Psi_* - I\|_k)^k \end{array} \right.$$

et en prenant la borne supérieure dans \mathbb{R}^N

$$\begin{aligned} \|\varphi \circ \Psi - \varphi \circ \Psi_*\|_k & \leq C_5 (1 + \|\varphi - I\|_k) \|\Psi - \Psi_*\|_k (1 + \|\Psi - I\|_k + \|\Psi_* - I\|_k)^{k-1} + \\ & + C_4 \text{Sup}_{R^N} \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} |(D^\alpha \varphi) \circ \Psi - (D^\alpha \varphi) \circ \Psi_*|_{R^N}^2 \right)^{1/2} (1 + \|\Psi_* - I\|_k)^k ; \end{aligned}$$

Supposons $\Psi \rightarrow \Psi_*$ dans $\mathcal{U}^{k, \sigma}$, i.e. $\|\Psi - \Psi_*\|_k \rightarrow 0$, alors $\text{Sup}_{R^N} |\Psi - \Psi_*|_{R^N} \rightarrow 0$ et si les fonctions $D^\alpha \varphi$ sont uniformément continues, i.e. si $\varphi \in \mathcal{U}^{k, \bar{c}}$, on a $\|\varphi \circ \Psi - \varphi \circ \Psi_*\|_k \rightarrow 0$.

e) Non continuité dans $\mathcal{V}^{k,\sigma}$ de l'application $\Psi \rightarrow \varphi \circ \Psi$, pour $\varphi \notin \mathcal{V}^{k,\bar{c}}$.

Etant donné $t \in \mathbb{R}^N$, on note $I+t$ l'application $x \rightarrow x+t$; l'application $t \rightarrow I+t$ est continue de \mathbb{R}^N dans $\mathcal{V}^{k,\sigma}$, quel que soit $k \geq 0$ et $\sigma = \infty$ ou \bar{c} , et on a, pour tout $\varphi \in \mathcal{V}^{k,\infty}$

$$\|\varphi \circ (I+t) - \varphi\|_k = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \text{ess} \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} |(D^\alpha \varphi)(x+t) - D^\alpha \varphi(x)|_{\mathbb{R}^N}^2 \right)^{1/2}$$

Si $\Psi \rightarrow \varphi \circ \Psi$ est continue au point I , alors $\varphi \circ (I+t)$ tend vers φ quand t tend vers 0 et l'égalité ci-dessus entraîne que $D^\alpha \varphi$, $\forall \alpha$, $|\alpha| \leq k$, est uniformément continue sur \mathbb{R}^N , i.e. que $\varphi \in \mathcal{V}^{k,\bar{c}}$.

f) L'application $\Psi \rightarrow \varphi \circ \Psi$ est localement lipschitzienne de $\mathcal{V}^{k,\sigma}$ dans $W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, si $\varphi \in W^{k+1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$.

Soient $\varphi \in W^{k+1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ et $\Psi, \Psi_\star \in \mathcal{V}^{k,\sigma}$. Reprenons la majoration (2.20). En notant que :

$$\begin{aligned} \|(D^\alpha \varphi_i) \circ \Psi - (D^\alpha \varphi_i) \circ \Psi_\star\|_{\mathbb{R}^N} &\leq \sup_{\mathbb{R}^N} |\text{grad}(D^\alpha \varphi_i)|_{\mathbb{R}^N} \|\Psi - \Psi_\star\|_{\mathbb{R}^N} \\ &\leq \sup_{\mathbb{R}^N} \left(\sum_{|\beta|=|\alpha|+1} |D^\beta \varphi_i|^2 \right)^{1/2} \|\Psi - \Psi_\star\|_{\mathbb{R}^N} \leq \|\varphi\|_{k+1} \|\Psi - \Psi_\star\|_k \end{aligned}$$

et en prenant la borne supérieure dans \mathbb{R}^N des deux membres de (2.20), il vient

$$\begin{aligned} \|\varphi \circ \Psi - \varphi \circ \Psi_\star\|_k &\leq C_3 \|\varphi\|_k \|\Psi - \Psi_\star\|_k (1 + \|\Psi - I\|_k + \|\Psi_\star - I\|_k)^{k-1} + \\ &\quad + C_6 \|\varphi\|_{k+1} \|\Psi - \Psi_\star\|_k (1 + \|\Psi_\star - I\|_k)^k \end{aligned}$$

ce qui établit le point v).

g) L'application $\varphi \rightarrow \varphi \circ \Psi$ est localement lipchitzienne de $\mathcal{V}^{k,\sigma}$ dans lui-même si $\varphi \in \mathcal{V}^{k+1,\infty}$.

Ce résultat découle du précédent en écrivant

$$\varphi \circ \Psi - \varphi \circ \Psi_\star = (\varphi - I) \circ \Psi - (\varphi - I) \circ \Psi_\star + \Psi - \Psi_\star. \quad \blacksquare$$

On peut démontrer un résultat analogue au lemme 2.2. relatif aux matrices ; on aura seulement besoin d'une majoration analogue à celle de la remarque 2.3. :

LEMME 2.3.

Soient $[M] \in W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{2N})$ et $\psi \in \mathcal{V}^{k,\sigma}$ où $k \geq 0$ et $\sigma = \infty$ ou \bar{c} ; si $\sigma = \infty$, on suppose en outre que $\psi \in \mathcal{C}^{1,\infty}$, alors

$$[M] \circ \psi \in W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{2N}) \text{ et}$$

$$(2.23) \quad \|[M] \circ \psi\|_k \leq \beta'_k \|[M]\|_k (1 + \|\psi - I\|_k)^k$$

où β'_k est une constante positive ($\beta'_0 = 1$) .

2.3.2. Inversibilité des applications voisines de l'identité.

LEMME 2.4.

i) Si $T \in \mathcal{V}^{k,\sigma}$, où $k \geq 1$ et $\sigma = \infty$ ou \bar{c} , vérifie

$$(2.21) \quad \|T - I\|_k \leq 1 / (2\sqrt{k N^{k+3}})$$

alors $T \in \mathcal{C}^{k,\sigma}$ et on a

$$(2.22) \quad \|T^{-1} - I\|_k \leq \varepsilon_k \|T - I\|_k, \text{ où } \varepsilon_k \text{ est une constante positive.}$$

ii) L'ensemble $\mathcal{C}^{k,\sigma}$ est ouvert dans $\mathcal{V}^{k,\sigma}$, pour $k \geq 1$ et $\sigma = \infty$ ou \bar{c} .

iii) L'application $T \rightarrow T^{-1}$ est continue de $\mathcal{V}^{k,\bar{c}}$, où $k \geq 1$, dans lui-même en tout point $T_\star \in \mathcal{C}^{k,\bar{c}}$.

iv) L'application $T \rightarrow T^{-1}$ est bornée de $\mathcal{V}^{k,\infty}$, où $k \geq 1$, dans lui-même au voisinage de tout point $T_\star \in \mathcal{C}^{k,\infty}$; elle est continue de $\mathcal{V}^{k,\infty}$ dans lui-même en un point $T_\star \in \mathcal{C}^{k,\infty}$ si et seulement si $T_\star^{-1} \in \mathcal{V}^{k,\bar{c}}$.

v) L'application $T \rightarrow T^{-1}$ est dérivable de $\mathcal{V}^{k,\sigma}$, où $k \geq 1$ et $\sigma = \infty$ ou \bar{c} dans $\mathcal{V}^{k-1,\bar{c}}$ au point I, et on a

$$\frac{\partial T^{-1}}{\partial T}(I) = -Id \quad (\text{Identité de } W^{k,\sigma}(R^N, R^N) \text{ dans lui-même}) \quad . \quad \blacksquare$$

DEMONSTRATION DU LEMME 2.4.

a) Premières propriétés.

L'hypothèse (2.21) entraîne que $T-I$ est une contraction stricte de R^N , donc T est une bijection d'inverse lipschitzien et $T^{-1}-I = (I-T) \circ T^{-1} \in L^\infty(R^N, R^N)$, de sorte que, comme on l'a vu à la remarque 2.1, $T^{-1} \in \mathcal{V}^{1,\infty}$; on a

$$(2.23) \quad \|T^{-1}-I\|_0 = \|T-I\|_0 \leq 1/(2\sqrt{k N^{k+3}})$$

L'hypothèse (2.21) entraîne d'après (2.6) que

$$(2.24) \quad |[(T-I)']|_{k-1} \leq \sqrt{k N^{k+3}} \|I-T\|_k \leq \frac{1}{2}$$

et la proposition 2.2 montre que $[T']$ est inversible au sens de matrices dans $W^{k-1,\sigma}(R^N, R^{2N})$ avec, d'après (2.5)

$$(2.24)\text{bis} \quad |[(T')^{-1} - [I]]|_{k-1} \leq 2 \cdot |[T'] - [I]|_{k-1}$$

Le corollaire 2.1. montre, puisque $T \in \mathcal{C}^{1,\infty}$ que

$$[(T^{-1})'] = [T']^{-1} \circ T^{-1}$$

donc

$$(2.25) \quad [(T^{-1}-I)'] = ([T']^{-1} - [I]) \circ T^{-1}$$

b) Montrons par récurrence que $T^{-1}-I \in W^{k,\sigma}(R^N, R^N)$

Supposons $T^{-1} \in \mathcal{V}^{h,\sigma}$, où $0 \leq h \leq k-1$; le lemme 2.3. permet de déduire de (2.25) et (2.24)bis que $[(T^{-1}-I)'] \in W^{h,\sigma}(R^N, R^{2N})$ avec:

d) Montrons que $T \rightarrow T^{-1}$ est continue dans $\mathcal{V}^{k,\sigma}$ en tout point $T_\star \in \mathcal{C}^{k,\bar{c}}$.

Soit $T_\star \in \mathcal{C}^{k,\bar{c}}$, on écrit $T^{-1} = T_\star^{-1} \circ (T_\star \circ T_\star^{-1})^{-1} = \pi_1 \circ \pi_2 \circ \pi_3(T)$

et l'application $\pi_3 : T \rightarrow T_\star \circ T_\star^{-1}$ est continue d'après le lemme 2.2.ii) et $\pi_3(T_\star) = I$

$\pi_2 : T \rightarrow T^{-1}$ est continue au point I d'après le lemme 2.4 i)

$\pi_1 : T_\star^{-1} \circ T$ est continue d'après le lemme 2.2.iv) [si et seulement si $T_\star^{-1} \in \mathcal{V}^{k,\bar{c}}$] .

e) Montrons que $T \rightarrow T^{-1}$ est bornée dans $\mathcal{V}^{k,\infty}$ au voisinage de $T_\star \in \mathcal{C}^{k,\infty}$

Si $\|T - T_\star\|_k$ est assez petit la majoration (2.22) permet de déduire de (2.27) que

$$\|T_\star \circ T^{-1} - I\|_k \leq \frac{\varepsilon_k}{2\sqrt{k N^{k+3}}}$$

et en écrivant $T^{-1} = T_\star^{-1} \circ (T_\star \circ T^{-1})$ la majoration (2.9)bis donne

$$\|T^{-1}\|_k \leq \beta_k \|T_\star^{-1}\|_k \left(1 + \frac{\varepsilon_k}{2\sqrt{k N^{k+3}}}\right)^k .$$

f) Montrons que $T \rightarrow T^{-1}$ n'est pas continue dans $\mathcal{V}^{k,\sigma}$ en tout point

T_\star tel que $T_\star^{-1} \notin \mathcal{V}^{k,\bar{c}}$

On écrit $T_\star^{-1} \circ T = (T_\star^{-1} \circ T_\star)^{-1} = \omega_1 \circ \omega_2 \circ \omega_1(T)$.

Supposons l'application $\omega_1 : T \rightarrow T^{-1}$ continue au point T_\star ;

comme l'application $\omega_2 : T \rightarrow T \circ T_\star$ est continue d'après le lemme 2.2. ii)

et comme l'application $\omega_1 : T \rightarrow T^{-1}$ est continue au point $\omega_2 \circ \omega_1(T_\star) = I$ d'après le lemme 2.4. i) ,

il en résulte que l'application $T \rightarrow T_\star^{-1} \circ T$ est continue au point I, ce qui entraîne que $T_\star^{-1} \in \mathcal{V}^{k,\bar{c}}$, comme on l'a vu au point e) de la démonstration du lemme 2.2.

g) Montrons que $T \rightarrow T^{-1}$ est dérivable de $\mathcal{V}^{k,\sigma}$ dans $\mathcal{V}^{k-1,\bar{c}}$ au point I.

Etant donné $\tau \in W^{k,\sigma}(R^N, R^N)$, où $k \geq 1$, $\sigma = \infty$ ou \bar{c} , tel que $\|\tau\|_k \leq 1/(2\sqrt{k N^{k+3}})$

on écrit

$$(I+\tau)^{-1} - I + \tau = I_0 \cdot (I+\tau)^{-1} - (I+\tau)_0 \cdot (I+\tau)^{-1} + \tau = \tau - \tau_0 \cdot (I+\tau)^{-1}$$

et le lemme 2.2 v) donne, avec la majoration (2.22)

$$\|(I+\tau)^{-1} - I + \tau\|_{k-1} \leq \gamma_k \|\tau\|_k \|I - (I+\tau)^{-1}\|_{k-1} (1 + \|I - (I+\tau)^{-1}\|_{k-1})^{k-1} \leq c \|\tau\|_k^2$$

ce qui montre que $T \rightarrow T^{-1}$ est dérivable avec

$$\frac{\partial T^{-1}}{\partial T}(I) \cdot \tau = -\tau \quad , \quad \forall \tau \in W^{k,\sigma}(R^N, R^N) \quad . \quad \blacksquare$$

2.4. PSEUDO DISTANCE ET PROPRIETES METRIQUES DES ESPACES DE DIFFEOMORPHISMES $\mathcal{G}^{k,\sigma}$.

Nous allons dans ce paragraphe munir les espaces $\mathcal{G}^{k,\sigma}$ d'une structure d'espace métrique complet [qui nous permettra au §2.5. de munir les espaces de domaines $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ d'une structure d'espace métrique complet]. On va définir cette structure par une pseudo-distance notée δ_k . Nous allons commencer par définir les pseudo-distances, qui sont un peu plus générales que les distances et mieux adaptées aux espaces $\mathcal{G}^{k,\sigma}$ et $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$.

2.4.1. Pseudo-distance sur un espace.

DEFINITION 2.1.

On appelle pseudo-distance sur un espace E une application δ de $E \times E$ dans R^+ telle que

- i) $\delta(e_1, e_2) = \delta(e_2, e_1) \quad \forall e_1, e_2 \in E$
- ii) $\delta(e_1, e_2) = 0$ si et seulement si $e_1 = e_2$
- iii) $\delta(e_1, e_3) \leq \delta(e_1, e_2) + \delta(e_2, e_3) + \delta(e_1, e_2) \cdot \delta(e_2, e_3) \cdot P(\delta(e_1, e_2) + \delta(e_2, e_3))$
 $\forall e_i \in E$, où P est une fonction de R^+ dans lui-même, continue et croissante.

■

PROPOSITION 2.3.

Soit δ une pseudo-distance sur E; pour tout α tel que $0 < \alpha < 1$, il existe une constante $\eta_\alpha > 0$ telle que l'application $\delta^{(\alpha)}$ définie par

$$\delta^{(\alpha)}(e_1, e_2) = \text{Inf} \{ \delta(e_1, e_2) ; \eta_\alpha \}^\alpha$$

soit une distance sur E. ■

DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION 2.3.

a) Soit $0 < \alpha < 1$. Pour $\eta \geq 0$ donné définissons la fonction F de $(\mathbb{R}^+)^2$ dans R par :

$$F(x, y) = (x^\alpha + y^\alpha)^{1/\alpha} - (x + y + P(2\eta)xy).$$

Cette fonction est symétrique en x et y. Elle vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} F(0, y) = 0 \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, y) = (\alpha - 1) x^{\alpha-2} y^\alpha (x^\alpha + y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha} - 2} \leq 0 \quad \forall x \geq 0, \forall y \geq 0 \\ F(y, y) = y \left[2^{\frac{1}{\alpha} - 2} - P(2\eta)y \right] \end{array} \right.$$

Soit $\eta_\alpha, \eta_\alpha > 0$ tel que

$$(2.28) \quad \eta_\alpha P(2\eta_\alpha) \leq 2^{1/\alpha} - 2$$

On a $F(y, y) \geq 0$ si $y \leq \eta_\alpha$ donc $F(x, y) \geq 0$ si $x \leq y \leq \eta_\alpha$, et

$$(2.29) \quad (x^\alpha + y^\alpha)^{1/\alpha} \geq x + y + P(2\eta_\alpha)xy \quad \forall x, y \text{ tels que } 0 \leq x, y \leq \eta_\alpha$$

b) Montrons que l'application définie par

$$\delta^{(\alpha)}(e_1, e_2) = (\text{Inf}(\delta(e_1, e_2), \eta_\alpha))^\alpha \text{ est une distance.}$$

Elle vérifie les hypothèses i) et ii) de la définition 2.1., il suffit donc de vérifier l'inégalité triangulaire.

Soient alors e_1, e_2, e_3 données dans E.

Si $\delta(e_1, e_2) \geq \eta_\alpha$ (ou si $\delta(e_2, e_3) \geq \eta_\alpha$) on a

$$\delta^{(\alpha)}(e_1, e_3) \leq (\eta_\alpha)^\alpha = \delta^{(\alpha)}(e_1, e_2) \leq \delta^{(\alpha)}(e_1, e_2) + \delta^{(\alpha)}(e_2, e_3)$$

Sinon c'est à dire si $\delta(e_1, e_2) < \eta_\alpha$ et $\delta(e_2, e_3) < \eta_\alpha$,

l'inégalité pseudo triangulaire jointe à (2.29) entraîne :

$$\begin{aligned} \delta(e_1, e_3) &\leq \delta(e_1, e_2) + \delta(e_2, e_3) + \delta(e_1, e_2)\delta(e_2, e_3)P(2\eta_\alpha) \\ &\leq ((\delta(e_1, e_2))^\alpha + (\delta(e_2, e_3))^\alpha)^{1/\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et } \delta^{(\alpha)}(e_1, e_3) &\leq (\delta(e_1, e_3))^\alpha \leq (\delta(e_1, e_2))^\alpha + (\delta(e_2, e_3))^\alpha \\ &= \delta^{(\alpha)}(e_1, e_2) + \delta^{(\alpha)}(e_2, e_3). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Soit E un espace muni d'une pseudo-distance δ . On définit une structure uniforme sur E, donc également une topologie sur E, en introduisant la base de voisinages $\{\mathcal{V}_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ de la diagonale de $E \times E$ définie par

$$\mathcal{V}_\varepsilon = \{(e_1, e_2) \mid \text{tel que } \delta(e_1, e_2) < \varepsilon\}.$$

On sait donc définir des suites de Cauchy sur E et la notion de complétion de E. Cette structure uniforme peut être définie par une quelconque distance $\delta^{(\alpha)}$, $0 < \alpha < 1$, elle est métrisable; pour définir une suite de Cauchy on pourra utiliser indifféremment δ ou $\delta^{(\alpha)}$.

DEFINITION 2.2.

Soit E un espace muni d'une pseudo-distance δ . Un sous-ensemble \mathcal{X} de E sera dit δ -borné s'il est inclus dans une δ -boule, c'est à dire si

$$\mathcal{X} \subset B(e_0, r) = \{e \in E \mid \delta(e, e_0) \leq r\} \quad \text{où } e_0 \in E, r \geq 0. \quad \blacksquare$$

Notons que tout sous ensemble de E est borné pour toute distance $\delta^{(\alpha)}$.

2.4.2. Pseudo-distance sur $\mathcal{G}^{k,\sigma}$.

THEOREME 2.1.

Soit k entier, ≥ 0 et $\sigma = \infty$ ou \bar{c} ;

L'application δ_k définie par

$$\delta_k(T_1, T_2) = \|T_2 \circ T_1^{-1} - I\|_k + \|T_1 \circ T_2^{-1} - I\|_k, \quad T_1, T_2 \in \mathcal{G}^{k,\sigma}$$

est une pseudo distance sur $\mathcal{G}^{k,\sigma}$.

Quand $k \geq 1$, $\mathcal{G}^{k,\sigma}$ est complet pour cette pseudo distance; de plus $\mathcal{G}^{k,\bar{c}}$ est un groupe topologique pour le loi \circ , et $\mathcal{G}^{k,\infty}$ n'est pas un groupe topologique. ■

REMARQUE 2.4.

La pseudo-distance δ_k est invariante par composition à droite, i.e. :

$$\delta_k(T_1 \circ T_\star, T_2 \circ T_\star) = \delta_k(T_1, T_2) \quad \forall T_1, T_2, T_\star \in \mathcal{G}^{k,\sigma}$$

D'autre part $\mathcal{G}^{k+1,\infty} \subset \mathcal{G}^{k,\bar{c}}$, $k \geq 0$, et on a

$$\delta_k(T_1, T_2) \leq \delta_{k+1}(T_1, T_2) \quad \forall T_1, T_2 \in \mathcal{G}^{k+1,\infty}.$$

DEMONSTRATION DU THEOREME 2.1.

a) Commençons par établir l'inégalité, $\forall T, T_\star \in \mathcal{G}^{k,\sigma}$

$$(2.30) \quad \begin{cases} \delta_k(T \circ T_\star, I) \leq \delta_k(T, I) + \delta_k(T_\star, I) + \beta_k \delta_k(T, I) \delta_k(T_\star, I) (1 + \delta_k(T, I) + \delta_k(T_\star, I))^{k-1} \\ \delta_0(T \circ T_\star, I) \leq \delta_0(T, I) + \delta_0(T_\star, I) \quad (\text{si } k = 0) \end{cases} \quad (\text{si } k \geq 1)$$

On écrit $T \circ T_\star - I = (T - I) \circ T_\star + T_\star - I$

que l'on majore en utilisant la majoration (2.9) du lemme 2.2. par

$$\|T \circ T_\star - I\|_k \leq \|T - I\|_k (1 + \beta_k \|T_\star - I\|_k (1 + \|T_\star - I\|_k)^{k-1}) + \|T_\star - I\|_k \quad (k \geq 1)$$

En majorant $(T \circ T_\star)^{-1} - I = T_\star^{-1} \circ T^{-1} - I$ de façon analogue et en additionnant, on établit (2.30).

b) Montrons que δ_k est une pseudo-distance.

L'application δ_k vérifie trivialement les propriétés i) et ii) de la définition 2.1, il reste donc à vérifier l'inégalité pseudo-triangulaire iii); étant donnés $T_1, T_2 \in \mathcal{C}^{k, \sigma}$, on a

$$(2.31) \quad \delta_k(T_1, T_2) = \delta_k(T_1 \circ T_2^{-1}, I) = \delta_k((T_1 \circ T_3^{-1}) \circ (T_3 \circ T_2^{-1}), I) \quad \forall T_3 \in \mathcal{C}^{k, \sigma}$$

et on majore le second membre avec (2.30) :

$$\begin{aligned} \delta_k(T_1, T_2) &\leq \delta_k(T_1 \circ T_3^{-1}, I) + \delta_k(T_3 \circ T_2^{-1}, I) + \\ &+ \beta_k \delta_k(T_1 \circ T_3^{-1}, I) \delta_k(T_3 \circ T_2^{-1}, I) (1 + \delta_k(T_1 \circ T_3^{-1}, I) + \delta_k(T_3 \circ T_2^{-1}, I))^{k-1} \end{aligned}$$

i.e.,

$$\begin{aligned} \delta_k(T_1, T_2) &\leq \delta_k(T_1, T_3) + \delta_k(T_3, T_2) + \beta_k \delta_k(T_1, T_3) \delta_k(T_3, T_2) (1 + \delta_k(T_1, T_3) + \delta_k(T_3, T_2))^{k-1} \\ &\hspace{15em} \text{si } k \geq 1 \\ \delta_0(T_1, T_2) &\leq \delta_0(T_1, T_3) + \delta_0(T_3, T_2) \quad \text{si } k = 0 \end{aligned}$$

c) Montrons que δ_k définit la topologie induite par $\mathcal{U}^{k, \sigma}$ sur $\mathcal{C}^{k, \sigma}$, quand $k \geq 1$.

Plus précisément, on va montrer que, $\forall T, T_* \in \mathcal{C}^{k, \sigma}$ où $k \geq 0$ et $\sigma = \infty$ ou \bar{c} ,

$$(2.32) \quad \|T - T_*\|_k \leq \beta_k \delta_k(T, T_*) (1 + \delta_k(T_*, I))^k$$

$$(2.33) \quad \delta_k(T, T_*) \leq \beta_k \|T - T_*\|_k \{ (1 + \|T^{-1} - I\|_k)^k + (1 + \|T_*^{-1} - I\|_k)^k \}$$

$$(2.33)\text{bis} \quad \delta_k(T, T_*) \leq c (\|T_*^{-1}\|_k) \|T - T_*\|_k \quad \forall T \in \mathcal{C}^{k, \sigma} \text{ tel que } \|T - T_*\|_k \text{ assez petit, } k \geq 1.$$

Pour établir (2.32) on écrit $T - T_* = (T \circ T_*^{-1} - I) \circ T_*$ et on applique la majoration (2.9) bis.

Pour établir (2.33) on écrit $T \circ T_*^{-1} - I = (T - T_*) \circ T_*^{-1}$ et $T_* \circ T^{-1} - I = (T_* - T) \circ T^{-1}$ et on utilise la majoration (2.9) bis.

Enfin (2.33) entraîne (2.33)bis car l'application $T \rightarrow T^{-1}$ est localement bornée au voisinage d'un point $T_\star \in \mathcal{C}^{k,\sigma}$ comme on l'a vu au lemme 2.4. iv).

On utilisera également la majoration suivante : $\forall T, T_\star \in \mathcal{C}^{k,\sigma}$ où $k \geq 1, \sigma = \infty$ ou \bar{c} ,

$$(2.34) \quad \|T^{-1} - T_\star^{-1}\|_{k-1} \leq \delta_{k-1}(T, T_\star) (1 + \gamma_{k-1} \delta_k(T, I) (1 + \delta_{k-1}(T, T_\star))^{k-1})$$

Pour l'établir on écrit $T^{-1} - T_\star^{-1} = T^{-1} - T^{-1} \circ (T \circ T_\star^{-1})$ et on utilise la majoration du lemme 2.2. vi).

d) Montrons que $\mathcal{C}^{k,\sigma}$ est complet, $k \geq 1$.

Soit $\{T_n\}$ une suite de Cauchy pour la pseudo-distance δ_k . La suite $\delta_k(T_n, T_{n_0})$, $n \in \mathbb{N}$, est donc bornée pour n_0 assez grand, et l'inégalité pseudo-triangulaire montre que $\delta_k(T_n, I)$ est bornée.

Les majorations (2.32) et (2.34) montrent alors $\{T_n\}$ et $\{T_n^{-1}\}$ sont des suites de Cauchy respectivement dans $\mathcal{V}^{k,\sigma}$ et $\mathcal{V}^{k-1,\bar{c}}$, espaces complets, donc $T_n \rightarrow T_\infty$ dans $\mathcal{V}^{k,\sigma}$, $T_n^{-1} \rightarrow T_\star^{-1}$ dans $\mathcal{V}^{k-1,\bar{c}}$ quand $n \rightarrow \infty$.

Ces suites convergent donc dans $\mathcal{V}^{0,\bar{c}} \subset \mathcal{C}(R^N, R^N)$ de sorte que

$$T_n \circ T_n^{-1} = T_n^{-1} \circ T_n = I \rightarrow T_\infty \circ T_\star^{-1} = T_\star^{-1} \circ T_\infty = I, \text{ i.e. } T_\star = T_\infty^{-1} \text{ et } T_\infty \in \mathcal{C}^{k-1,\bar{c}}$$

Il reste à montrer que $T_\infty \in \mathcal{C}^{k,\sigma}$, i.e. que $T_\infty^{-1} \in \mathcal{V}^{k,\sigma}$.

Or, $\delta_k(T_n, I)$ étant bornée les dérivées $D^\alpha(T_n^{-1} - I)$, $0 \leq |\alpha| \leq k$, sont bornées dans $L^\infty(R^N, R^N)$ et convergent dans $L^\infty(R^N, R^N)$ faible étoile, vers une limite qui vaut $D^\alpha(T_\star^{-1} - I)$, de sorte que $T_\infty \in \mathcal{C}^{k,\infty}$.

Si $\sigma = \bar{c}$, puisque $T_\infty \in \mathcal{C}^{k,\infty}$ la matrice $[T_\infty']$ est inversible, $|\det [T_\infty']| \geq \alpha > 0$ p.p. dans R^N et $[T_\infty'] \in \bar{\mathcal{C}}^{k-1}(R^N, R^{2N})$, de sorte que $[T_\infty']^{-1} \in \bar{\mathcal{C}}^{k-1}(R^N, R^{2N})$; le corollaire 2.1 montre alors que

$$[(T_\infty^{-1})'] = [T_\infty']^{-1} \circ T_\infty^{-1} \in \bar{\mathcal{C}}^{k-1}(R^N, R^N), \text{ donc que } T_\infty^{-1} \in \mathcal{V}^{k,\bar{c}}.$$

e) Montrons que le groupe $\mathcal{C}^{k, \bar{c}}$ est topologique, et que $\mathcal{C}^{k, \infty}$ ne l'est pas ($k \geq 1$).

Les résultats de continuité ii) et iii) du lemme 2.2 et le résultat ii) du lemme 2.4 montrent que $\mathcal{C}^{k, \bar{c}}$, pour $k \geq 1$, est un groupe topologique pour la topologie induite par celle de $\mathcal{V}^{k, \bar{c}}$, donc pour la topologie définie par δ_k comme on l'a vu en c).

De même le résultat de non continuité iv) du lemme 2.2 établit que $\mathcal{C}^{k, \infty}$, où $k \geq 1$, n'est pas un groupe topologique. ■

REMARQUE 2.5.

Il résulte de la remarque 2.4 que les distances introduites à la proposition 2.3. vérifient, pour $0 < \alpha < 1$, et $T_1, T_2 \in \mathcal{C}^{k, \sigma}$ où $k \geq 0$ et $\sigma = \infty$ ou \bar{c} ,

$$\delta_k^{(\alpha)}(T_1 \circ T_2, I) = \delta_k^{(\alpha)}(T_1, T_2^{-1}) \leq \delta_k^{(\alpha)}(T_1, I) + \delta_k^{(\alpha)}(I, T_2^{-1}) = \delta_k^{(\alpha)}(T_1, I) + \delta_k^{(\alpha)}(T_2, I)$$

REMARQUE 2.6.

Nous aurions pu munir $\mathcal{C}^{k, \sigma}$ d'une des métriques suivantes :

- i) la métrique $\|T_2 - T_1\|_k$ induite par $\mathcal{V}^{k, \sigma}$, qui comme on l'a vu au point c) de la démonstration du théorème 2.1, définit la même topologie que δ_k ($k \geq 1$). Mais cette métrique ne rend pas $\mathcal{C}^{k, \sigma}$ complet puisque $\mathcal{C}^{k, \sigma}$ est ouvert dans $\mathcal{V}^{k, \sigma}$, cf. lemme 2.4. ii), et la distance correspondante sur l'espace de domaines $\mathcal{D}_Q^{k, \sigma}$ construite comme en (2.37) ne le rendrait plus complet.
- ii) la métrique $\|T_2 - T_1\|_k + \|T_2^{-1} - T_1^{-1}\|_k$, qui définit la même topologie que δ_k sur $\mathcal{C}^{k, \bar{c}}$ d'après le lemme 2.4 iii), et une topologie strictement plus fine que δ_k sur $\mathcal{C}^{k, \infty}$ puisqu'elle rend l'application $T \rightarrow T^{-1}$ continue. Mais on ne sait pas si la distance correspondante sur l'espace de domaine $\mathcal{D}_Q^{k, \sigma}$ le rendrait complet. De plus la propriété d'invariance par composition à droite énoncée à la remarque 2.4. n'est plus vérifiée, et la distance correspondante sur $\mathcal{D}_Q^{k, \sigma}$ dépendrait du domaine de base Q. ■

2.5. PROPRIETES ALGEBRIQUES ET PROPRIETES METRIQUES DES ESPACES DE DOMAINES $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$

On va dans ce paragraphe définir les espaces de domaines $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$, montrer que ce sont des espaces homogènes, et les munir d'une structure d'espace métrique complet définie par une pseudo-distance, notée $d_{k,\sigma}$, construite à partir de la pseudo-distance de δ_k de $\mathcal{C}^{k,\sigma}$.

2.5.1. Définition et propriétés algébriques des espaces $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$

Etant donné Q un sous ensemble de \mathbb{R}^N , et $k \geq 0$ et $\sigma = \bar{c}$, ou $k \geq 1$ et $\sigma = \infty$ ou \bar{c} , on définit les espaces

$$\mathcal{D}_Q^{k,\sigma} = \{T(Q) \text{ , } T \in \mathcal{C}^{k,\sigma}\} ;$$

Q sera en général un ouvert connexe, auquel cas tout élément de $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ sera un ouvert connexe ; Q pourra cependant être par exemple une variété de dimension inférieure à N de \mathbb{R}^N , ou un ouvert d'une telle variété auquel cas tout élément de $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ sera encore de même nature.

On ne s'intéressera pas à $\mathcal{D}_Q^{0,\infty}$ car $\mathcal{C}^{0,\infty}$ n'est pas un espace d'homéomorphismes de \mathbb{R}^N , et ne conserve donc pas les propriétés topologiques de Q .

Le groupe $\mathcal{C}^{k,\sigma}$ opère sur $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ pour la loi externe \star définie de $\mathcal{C}^{k,\sigma} \times \mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$

dans $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ par $(T,D) \rightarrow T \star D = T(D) = \{T(x) \text{ , } x \in D\}$,

et on a le

LEMME 2.5.

L'espace $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ où $k \geq 0$ et $\sigma = \infty$ ou \bar{c} muni du groupe d'opérateurs $\mathcal{C}^{k,\sigma}$ est un espace homogène. ■

DEMONSTRATION DU LEMME 2.5.

Vérifions les axiomes de définitions d'un espace homogène, cf. par exemple BOURBAKI [1] :

i) associativité au sens

$$(T_2 \circ T_1) \star D = T_2 \star (T_1 \star D) \quad \forall T_1, T_2 \in \mathcal{C}^{k,\sigma} \quad , \quad \forall D \in \mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$$

ii) l'élément neutre I de $\mathcal{C}^{k,\sigma}$, est opérateur neutre pour la loi \star , i.e.

$$I \star D = D \quad \forall D \in \mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$$

iii) $\forall D_1, D_2 \in \mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$, il existe $T \in \mathcal{C}^{k,\sigma}$ tel que $D_2 = T \star D_1$

ce qui est vérifié car il existe $T_1, T_2 \in \mathcal{C}^{k,\sigma}$ tels que $D_1 = T_1(Q), D_2 = T_2(Q)$,
donc $T = T_2 \circ T_1^{-1}$. ■

2.5.2. Pseudo-distance et propriétés métriques de $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$.

THEOREME 2.2.

On suppose

(2.35) Q est ouvert ou fermé dans \mathbb{R}^N .

L'application définie pour $D_1, D_2 \in \mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ où $k = 0$ et $\sigma = \bar{c}$ ou $k \geq 1$ et $\sigma = \infty$ ou \bar{c} , par

$$(2.36) \quad d_{k,\sigma}(D_1, D_2) = \inf_{\substack{\tau \in \mathcal{C}^{k,\sigma} \\ \tau(D_1) = D_2}} \delta_k(\tau, I) = \inf_{\substack{\tau \in \mathcal{C}^{k,\sigma} \\ \tau(D_1) = D_2}} \{ \|\tau - I\|_k + \|\tau^{-1} - I\|_k \}$$

est une pseudo-distance sur $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$.

Les espaces $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ et $\mathcal{C}^{k,\sigma}$ étant munis de leur pseudo-distances respectives $d_{k,\sigma}$ et δ_k , on a les propriétés suivantes :

i) $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$, $k \geq 1$, $\sigma = \infty$ ou \bar{c} , est complet.

ii) l'application $T \rightarrow T(D)$ est une contraction de $\mathcal{C}^{k,\sigma}$ dans $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ où $k = 0$ et $\sigma = \bar{c}$, ou $k \geq 1$ et $\sigma = \infty$ ou \bar{c} .

iii) l'application $(T, D) \rightarrow T(D)$ est continue de $\mathcal{C}^{k,\bar{c}} \times \mathcal{D}_Q^{k,\bar{c}}$ dans $\mathcal{D}_Q^{k,\bar{c}}$, où $k \geq 0$.

iv) $\mathcal{D}_Q^{k,\bar{c}}$, $k \geq 1$, est un espace homogène topologique. ■

REMARQUE 2.7.

Comme le montre l'axiome iii) que nous avons vérifié dans la démonstration du lemme 2.5, $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ est l'orbite de chacun de ses éléments et on a pour tout $D \in \mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$, $\mathcal{D}_D^{k,\sigma} = \mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$.

On remarque de plus que la pseudo-distance $d_{k,\sigma}$ ne dépend pas de Q . Elle dépend seulement de l'ordre de régularité des homéomorphismes de R^N . ■

REMARQUE 2.8.

Il résulte de la remarque 2.4. que

$$(2.37) \quad d_{k,\sigma}(D_1, D_2) = \inf_{\substack{T_1, T_2 \in \mathcal{C}^{k,\sigma} \\ T_1(D) = D_1, T_2(D) = D_2}} \delta_k(T_1, T_2) \quad \forall D, D_1, D_2 \in \mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$$

$$(2.38) \quad d_{k,\sigma}(D_1, D_2) = \inf_{\substack{T_1 \in \mathcal{C}^{k,\sigma} \\ T_1(D) = D_1}} \delta_k(T_1, T_2) \quad \begin{array}{l} \forall D, D_1, D_2 \in \mathcal{D}_Q^{k,\sigma}, \\ \forall T_2 \in \mathcal{C}^{k,\sigma}, T_2(D) = D_2 \end{array}$$

D'autre part, on a $\mathcal{D}_Q^{k+1, \bar{c}} \subset \mathcal{D}_Q^{k+1, \infty} \subset \mathcal{D}_Q^{k, \bar{c}}$, $k \geq 0$, et on a

$$(2.39) \quad d_{k, \bar{c}}(D_1, D_2) \leq d_{k+1, \infty}(D_1, D_2) \leq d_{k+1, \bar{c}}(D_1, D_2) \quad \forall D_1, D_2 \in \mathcal{D}_Q^{k+1, \bar{c}}. \quad \blacksquare$$

DEMONSTRATION DU THEOREME 2.2.

a) $d_{k,\sigma}$ est une pseudo-distance sur $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$

Nous allons vérifier les propriétés ii) et iii) de la définition 2.1., § 2.4.1., la propriété de symétrie i) étant triviale.

Vérification de la propriété ii)

On a trivialement $d_{k,\sigma}(D, D) = 0$; réciproquement si $d_{k,\sigma}(D_1, D_2) = 0$, il existe par définition une suite $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\tau_n \in \mathcal{C}^{k,\sigma}, \quad \tau_n(D_1) = D_2$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} (|\tau_n(x) - x|_{\mathbb{R}^M} + |\tau_n^{-1}(x) - x|_{\mathbb{R}^M}) \leq \delta_k(\tau_n, I) \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

Supposons Q fermé, alors D_1 et D_2 sont fermés, puisque les éléments de $\mathcal{C}^{k,\sigma}$ sont des homéomorphismes, et

$$\forall x \in D_1, \quad \tau_n(x) \rightarrow x \text{ où } \tau_n(x) \in D_2 \text{ donc } D_1 \subset \overline{D_2} = D_2;$$

de même $D_2 \subset D_1$; d'où $D_1 = D_2$.

Si Q est ouvert, on montre que $\mathbb{R}^N - D_1 = \mathbb{R}^N - D_2$ de la même façon.

Vérification de la propriété iii)

Soient $D_i \in \mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$, $i = 1, 2, 3$ et $T, T_\star \in \mathcal{C}^{k,\sigma}$ tels que

$$T(D_1) = D_2, \quad T_\star(D_2) = D_3.$$

On a $T_\star \circ T \in \mathcal{C}^{k,\sigma}$, $T_\star \circ T(D_1) = D_3$ et, cf. (2.30)

$$\delta_k(T \circ T_\star, I) \leq \delta_k(T, I) + \delta_k(T_\star, I) + \beta_k \delta_k(T, I) \delta_k(T_\star, I) (1 + \delta_k(T, I) + \delta_k(T_\star, I))^{k-1}.$$

En prenant la borne inférieure par rapport à T et T_\star , il vient

$$d_{k,\sigma}(D_1, D_3) \leq d_{k,\sigma}(D_1, D_2) + d_{k,\sigma}(D_2, D_3) + \beta_k \cdot d_{k,\sigma}(D_1, D_2) \cdot d_{k,\sigma}(D_2, D_3) \cdot (1 + d_{k,\sigma}(D_1, D_2) + d_{k,\sigma}(D_2, D_3))^{k-1}. \quad \blacksquare$$

b) Une condition nécessaire et suffisante de convergence dans $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$, $k \geq 1$.

Soient $D \in \mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ où $k \geq 1$ et $\sigma = \infty$ ou \bar{c} , et $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$

On a :

$$(2.40) \quad \begin{cases} D_n \rightarrow D \text{ dans } \mathcal{D}_Q^{k,\sigma} \text{ si et seulement si} \\ \text{il existe } T \in \mathcal{C}^{k,\sigma}, T_n \in \mathcal{C}^{k,\sigma} \text{ tels que } T(Q) = D, T_n(Q) = D_n \text{ et} \\ T_n \rightarrow T \text{ dans } \mathcal{V}^{k,\sigma} \end{cases}$$

En effet, étant donné $T \in \mathcal{C}^{k,\sigma}$ tel que $T(Q) = D$, on définit T_n ou τ_n par $T_n = \tau_n \circ T$.

Il résulte du lemme 2.2., ii) que

$$T_n \rightarrow T \text{ dans } \mathcal{V}^{k,\sigma} \iff \tau_n \rightarrow I \text{ dans } \mathcal{V}^{k,\sigma}$$

et le lemme 2.4. i) montre pour $k \geq 1$ que cette dernière condition est équivalente à

$$\delta_k(\tau_n, I) \rightarrow 0.$$

c) $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ est complet, $k \geq 1$.

Soit $\{D_n\}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$, on choisit une sous-suite encore notée $\{D_n\}$ telle que

$$d_{k,\sigma}(D_n, D_{n+1}) \leq 2^{-\left(\frac{n}{\alpha} + 1\right)}, \text{ où } \alpha \text{ est donné, } 0 < \alpha < 1.$$

Il existe alors τ_n , tel que

$$\begin{cases} \tau_n \in \mathcal{C}^{k,\sigma}, & \tau_n(D_n) = D_{n+1} \\ \delta_k(\tau_n, I) \leq 2d_{k,\sigma}(D_n, D_{n+1}) \leq 2^{-\frac{n}{\alpha}} \end{cases}$$

Soit $S_n = \tau_{n-1} \circ \dots \circ \tau_2 \circ \tau_1$, $n \geq 2$; on a

$$S_n \in \mathcal{C}^{k,\sigma} \text{ et } S_n(D_1) = D_n.$$

La propriété (2.31) montre que, si $n \geq m \geq 2$, on a :

$$\delta_k^{(\alpha)}(S_n, S_m) = \delta_k^{(\alpha)}(S_n \circ S_m^{-1}, I) = \delta_k^{(\alpha)}(\tau_{n-1} \circ \dots \circ \tau_m, I)$$

et la majoration de la remarque 2.5. montre que :

$$\delta_k^{(\alpha)}(S_n, S_m) \leq \sum_{i=m}^{n-1} \delta_k^{(\alpha)}(\tau_i, I) \leq \sum_{i=m}^{n-1} 2^{-i} \leq 2^{-m+1}$$

Donc $\{S_n\}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}^{k,\sigma}$ pour la pseudo-distance δ_k et le théorème 2.1 montre que $S_n \rightarrow S_\infty$ dans $\mathcal{C}^{k,\sigma}$.

La propriété (2.40) montre alors que

$$D_n = S_n(D_1) \rightarrow D_\infty = S_\infty(D) \text{ dans } \mathcal{D}_Q^{k,\sigma}, \text{ où } D_\infty \in \mathcal{D}_Q^{k,\sigma}.$$

d) L'application $T \rightarrow T(D)$ est une contraction, $k \geq 0$.

Etant donné $D \in \mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$, (2.37) montre que :

$$d_{k,\sigma}(T_1(D), T_2(D)) \leq \delta_k(T_1, T_2) \quad \forall T_1, T_2 \in \mathcal{C}^{k,\sigma}.$$

e) L'application $(T, D) \rightarrow T(D)$ est continue de $\mathcal{C}^{k,\bar{c}} \times \mathcal{D}_Q^{k,\bar{c}}$ dans $\mathcal{D}_Q^{k,\bar{c}}$, $k \geq 0$.

Nous allons montrer que l'application $D \rightarrow T(D)$ est continue de $\mathcal{D}_Q^{k,\bar{c}}$ dans lui-même quand $T \in \mathcal{C}^{k,\bar{c}}$, la propriété en résultera immédiatement.

En effet, si $D \rightarrow D_\star$ dans $\mathcal{D}_Q^{k,\bar{c}}$ il existe, d'après la définition de $d_{k,\bar{c}}$, $\tau_D \in \mathcal{C}^{k,\bar{c}}$ tel que $\tau_D(D_\star) = D$ et $\delta_k(\tau_D, I) \rightarrow 0$, et on a

$$d_{k,\bar{c}}(T(D), T(D_\star)) \leq \delta_k(T \circ \tau_D \circ T^{-1}, I);$$

Le second membre tend vers 0 puisque l'application $\tau \rightarrow T \circ \tau \circ T^{-1}$ est continue de $\mathcal{C}^{k,\bar{c}}$ dans lui-même quand $T \in \mathcal{C}^{k,\bar{c}}$ (cf. lemme 2.2 ii) et iii)), et est donc continue de $\mathcal{C}^{k,\bar{c}}$ dans lui-même muni de la pseudo-distance δ_k qui définit la même topologie (cf. Remarque 2.6); c'est à dire $T(D) \rightarrow T(D_\star)$ dans $\mathcal{D}_Q^{k,\bar{c}}$.

f) $\mathcal{D}_Q^{k,\bar{c}}$ est un espace homogène topologique, $k \geq 1$.

Vérifions les axiomes d'un espace homogène topologique, cf. BOURBAKI [2].

i) Le groupe $\mathcal{C}^{k,\bar{c}}$ est topologique et il opère continuellement dans $\mathcal{D}_Q^{k,\bar{c}}$.

Cela a été établi au théorème 2.1. et au point e) ci-dessus.

ii) Quel que soit $D \in \mathcal{D}_Q^{k, \bar{c}}$ l'application $T \rightarrow T(D)$ de $\mathcal{C}^{k, \bar{c}}$ dans $\mathcal{D}_Q^{k, \bar{c}}$ est ouverte.

Il suffit, cf. BOURBAKI [2], de vérifier que pour un élément D_0 de $\mathcal{D}_Q^{k, \bar{c}}$ l'application $T \rightarrow T(D_0)$ transforme tout voisinage de I en un voisinage de D_0 , ce qui est vérifié puisque $\forall \varepsilon > 0, \{D \mid d_{k, \bar{c}}(D, D_0) < \varepsilon\} \subset \{T(D_0) \mid \delta_k(T, I) < \varepsilon\}$.

g) $\mathcal{D}_Q^{k, \infty}$ n'est pas un espace homogène topologique puisque $\mathcal{C}^{k, \infty}$ n'est pas un groupe topologique. ■

2.6. COMPLEMENTS SUR LES ESPACES DE DOMAINES $\mathcal{D}_Q^{k, \sigma}$

Nous allons dans ce paragraphe donner un certain nombre de résultats sur les espaces $\mathcal{D}_Q^{k, \sigma}$:

- comparaison des distances $d_{k, \sigma}$ à la distance de Hausdorff .
- compacité de l'injection de $\mathcal{D}_Q^{k+1, \infty}$ dans $\mathcal{D}_Q^{k, \bar{c}}$.
- $\mathcal{D}_Q^{k, \sigma}$ peut être obtenu comme espace quotient du groupe $\mathcal{C}^{k, \sigma}$ par la relation d'équivalence définie par $T_1 \sim T_2$ si $T_1(Q) = T_2(Q)$.
- Exemple d'ensemble Q (non ouvert) de \mathbb{R}^N pour lequel $d_{1, \infty}$ n'est pas une distance sur $\mathcal{D}_Q^{1, \infty}$.

2.6.1. Métrie de Hausdorff.

Etant donnés A, B deux sous ensembles de \mathbb{R}^N , on note

$$(2.41) \quad \text{dist}(A, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} |y-x|_{\mathbb{R}^N} + \sup_{x \in B} \inf_{y \in A} |y-x|_{\mathbb{R}^N}$$

On sait que cette application est une distance, dite de Hausdorff, sur les fermés de \mathbb{R}^N , et que

$$(2.42) \quad \text{dist}(A, B) = \text{dist}(\bar{A}, \bar{B}) \quad \forall A, B \subset \mathbb{R}^N.$$

THEOREME 2.3.

i) Soit Q un sous-ensemble de R^N tel que

$$(2.43) \quad Q \text{ est fermé ou } Q = \overset{\circ}{Q} \text{ (intérieur de l'adhérence de } Q)$$

alors l'application dist définie par (2.40) est une distance sur $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$,
 $k \geq 1$ et $\sigma = \infty$ ou \bar{c} , ou $k = 0$ et $\sigma = \bar{c}$.

ii) $\forall D_1, D_2 \in \mathcal{D}_Q^{0,\bar{c}}$ on a

$$(2.44) \quad \text{Sup}\{\text{dist}(D_1, D_2); \text{dist}(\partial D_1, \partial D_2); \text{dist}(R^N - D_1, R^N - D_2)\} \leq d_{0,\bar{c}}(D_1, D_2) \quad \blacksquare$$

La distance de Hausdorff n'est pas suffisante pour notre étude car elle ne rend pas les espaces $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ complets.

Démonstration de la proposition 2.4.

i) La propriété (2.43) se conservant par homéomorphisme, tous les éléments de $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ la vérifient ; si Q est fermé la proposition résulte donc de ce que dist est une distance sur les fermés de R^N .

Si $Q = \overset{\circ}{Q}$, la propriété de symétrie et l'inégalité triangulaire sont immédiates ainsi que la vérification de $\text{dist}(D, D) = 0$. Réciproquement si $\text{dist}(D_1, D_2) = 0$, on a d'après (2.42) $\bar{D}_1 = \bar{D}_2$ d'où $\overset{\circ}{D}_1 = \overset{\circ}{D}_2$ i.e. $D_1 = D_2$.

ii) Soit $\tau \in \mathcal{C}^{0,\bar{c}}$, tel que $\tau(D_1) = D_2$, on a :

$$\text{dist}(D_1, D_2) \leq \sup_{x \in D_1} |\tau(x) - x| + \sup_{x \in D_2} |\tau^{-1}(x) - x| \leq \|\tau - I\|_0 + \|\tau^{-1} - I\|_0 = \delta_{0,\bar{c}}(\tau, I)$$

et en prenant la borne inférieure par rapport à τ il vient

$$\text{dist}(D_1, D_2) \leq d_{0,\bar{c}}(D_1, D_2)$$

Les autres majorations se démontrent de façon analogue en observant que, si $\tau \in \mathcal{C}^{0,\bar{c}}$ vérifie $\tau(D_1) = D_2$ il vérifie également $\tau(\partial D_1) = \partial D_2$ et $\tau(R^N - D_1) = R^N - D_2$. \blacksquare

2.6.2. Résultats de compacité.

THEOREME 2.4

On suppose Q ouvert ou fermé dans R^N et borné, et on se donne $D_0 \in \mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ et $r \geq 0$.

i) Soit $k \geq 2$ et $\sigma = \infty$ ou \bar{c} ; de toute suite $\{D_n\}$ de $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ telle que $d_{k,\sigma}(D_n, D_0) \leq r$, on peut extraire une sous-suite convergeant dans $\mathcal{D}_Q^{k-1,\bar{c}}$ vers un élément D_∞ de $\mathcal{D}_Q^{k,\infty}$ tel que $d_{k,\infty}(D_\infty, D_0) \leq r$.

ii) Soit $\sigma = \infty$ ou \bar{c} ; de toute suite $\{D_n\}$ de $\mathcal{D}_Q^{1,\sigma}$ telle que $d_{1,\sigma}(D_n, D_0) \leq r$ on peut extraire une sous suite $\{D_m\}$ convergeant vers un élément $D_\infty \in \mathcal{D}_Q^{1,\infty}$ tel que $d_{1,\infty}(D_\infty, D_0) \leq r$, au sens suivant :

$$\text{Sup}\{\text{dist}(D_m, D_\infty) ; \text{dist}(\partial D_m, \partial D_\infty) ; \text{dist}(R^N - D_m, R^N - D_\infty)\} \rightarrow 0 . \quad \blacksquare$$

REMARQUE 2.9.

Le résultat i) est plus fort que la compacité de l'injection de $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ dans $\mathcal{D}_Q^{k-1,\bar{c}}$. On le complète en utilisant la continuité de l'injection de $\mathcal{D}_Q^{k-1,\bar{c}}$ dans $\mathcal{D}_Q^{0,\bar{c}}$ et la majoration (2.44) pour obtenir la convergence dans les distances de Hausdorff.

Ce théorème montre que les $d_{k,\infty}$ boules munies de la pseudo-distance $d_{k-1,\bar{c}}$ si $k \geq 2$ ou de la distance de Hausdorff si $k \geq 1$ sont compactes. On ne sait pas montrer de résultats analogues pour les $d_{k,\bar{c}}$ boules. \blacksquare

Démonstration du Théorème 2.4.

a) Soit $k \geq 1$, et $\{D_n\}_{n \in N}$ une suite de $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ telle que $d_{k,\sigma}(D_n, D_0) \leq r$, $r > 0$ donné.

Il existe donc $T_n \in \mathcal{C}^{k,\sigma}$ tel que $T_n(D_0) = D_n$ et

$$\|T_n - I\|_k + \|T_n^{-1} - I\|_k \leq r + \frac{1}{n}$$

et on peut en extraire une sous-suite $\{T_m\}_{m \in N}$, telle que quand $m \rightarrow \infty$

$$(2.45) \quad T_m - I \rightarrow 0, \quad T_m^{-1} - I \rightarrow 0_{\star} \text{ dans } W^{k-1, \bar{c}}(B(0, \rho); \mathbb{R}^N), \quad \forall \rho \geq 0$$

(On considère par extraction successives des suites emboîtées $\{T_n^i\}_{n \in \mathbb{N}}$ qui assurent la convergence dans $W^{k-1, \bar{c}}(B(0, i); \mathbb{R}^N)$, et on choisit $T_m = T_m^m$).

On a $T_m \circ T_m^{-1} = T_m^{-1} \circ T_m = I \rightarrow (I+\theta) \circ (I+\theta_{\star}) = (I+\theta_{\star}) \circ (I+\theta) = I$ en tout point de \mathbb{R}^N , de sorte que $T_{\infty} = I+\theta$ est une bijection de \mathbb{R}^N d'inverse $I+\theta_{\star}$.

Comme les $D^{\alpha}(T_m - I)$, $D^{\alpha}(T_m^{-1} - I)$, $0 < |\alpha| \leq k$, $m \in \mathbb{N}$, sont bornés dans $L^{\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, après une nouvelle extraction de sous-suites on a

$$D^{\alpha}(T_m - I) \rightarrow D^{\alpha}(T_{\infty} - I), \quad D^{\alpha}(T_m^{-1} - I) \rightarrow D^{\alpha}(T_{\infty}^{-1} - I) \text{ dans } L^{\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \text{ faible étoile}$$

de sorte que $T_{\infty}, T_{\infty}^{-1} \in \mathcal{V}^{k, \infty}$ i.e. $T_{\infty} \in \mathcal{C}^{k, \infty}$ avec $\|T_{\infty} - I\|_k + \|T_{\infty}^{-1} - I\|_k \leq r$

puisque la norme de $L^{\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ est faible étoile s.c.i.,

$$\text{donc} \quad D_{\infty} = T_{\infty}(D_0) \in \mathcal{D}_Q^{k, \infty} \text{ et } d_{k, \infty}(D_{\infty}, D_0) \leq r.$$

b) Quand $k \geq 2$, il nous reste pour établir le point i) à démontrer que

$$(2.46) \quad D_m \rightarrow D_{\infty} \text{ dans } \mathcal{D}_Q^{k-1, \bar{c}}.$$

Cela serait réalisé si $T_m \rightarrow T_{\infty}$ dans $\mathcal{C}^{k-1, \bar{c}}$, mais on ne sait pas le montrer ; on va néanmoins obtenir une telle convergence en modifiant T_m hors d'une boule assez grande.

Notons $\lambda = \text{dist}(\{0\}, D_0) + r$; on a

$$(2.47) \quad D_m \subset B(0, \lambda) \quad \forall m$$

puisque d'après (2.44),

$$\text{dist}(\{0\}, D_m) \leq \text{dist}(\{0\}, D_0) + \text{dist}(D_0, D_m) \leq \text{dist}(\{0\}, D_0) + d_{0, \bar{c}}(D_0, D_m).$$

On se donne ψ tel que :

$$(2.48) \quad \begin{cases} \psi \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}) & 0 \leq \psi \leq 1, \quad \psi = 1 \text{ dans } B(0, \lambda) \text{ et } \psi = 0 \text{ dans} \\ \mathbb{R}^N - B(0, \lambda+1) \end{cases}$$

Posons : $\hat{T}_m = T_\infty + \psi \times (T_m - T_\infty)$.

On a $\hat{T}_m = T_m$ dans $B(0, \lambda)$ et (2.47) entraine que

$$(2.49) \quad \hat{T}_m(D_0) = T_m(D_0) = D_m .$$

Dans $R^N - B(0, \lambda+1)$ on a $\hat{T}_m - T_\infty = 0$;

dans $B(0, \lambda+1)$ la formule de Leibnitz permet de majorer

$$\left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq k-1} |D^\alpha (\hat{T}_m - T_\infty)|_{R^N}^2 \right)^{1/2} \leq c \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq k-1} |D^\alpha \psi|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq k-1} |D^\alpha (T_m - T_\infty)|_{R^N}^2 \right)^{1/2}$$

d'où

$$\sup_{B(0, \lambda+1)} \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq k-1} |D^\alpha (\hat{T}_m - T_\infty)|_{R^N}^2 \right)^{1/2} \leq c \|\psi\|_{W^{k-1, \infty}(R^N)} \cdot \|T_m - T_\infty\|_{W^{k-1, \infty}(B(0, \lambda+1), R^N)}$$

donc $\hat{T}_m - T_\infty \in W^{k-1, \bar{c}}(R^N, R^N)$ avec

$$\|\hat{T}_m - T_\infty\|_{k-1} \leq c \|\psi\|_{W^{k-1, \infty}(R^N)} \|T_m - T_\infty\|_{W^{k-1, \infty}(B(0, \lambda+1), R^N)} .$$

La convergence (2.45) entraine alors que $\hat{T}_m \rightarrow T_\infty$ dans $\mathcal{U}^{k-1, \bar{c}}$ et comme $T_\infty \in \mathcal{C}^{k-1, \bar{c}}$ le lemme 2.4. ii) et iii) [qui ne s'applique que pour $k-1 \geq 1$] montre que \hat{T}_m est inversible et que $\hat{T}_m^{-1} \rightarrow T_\infty^{-1}$ dans $\mathcal{U}^{k-1, \bar{c}}$, donc $\delta_k(\hat{T}_m, T_\infty) \rightarrow 0$, ce qui avec (2.49) établit (2.46).

d) Quand $k = 1$, il nous reste à démontrer la convergence pour les distances de Hausdorff. On a :

$$\text{dist}(D_m, D_\infty) = \text{dist}(T_m(D_0), T_\infty(D_0)) \leq 2 \sup_{x \in D_0} |T_m(x) - T_\infty(x)|_{R^N}$$

$$\text{dist}(\partial D_m, \partial D_\infty) \leq 2 \sup_{x \in \partial D_0} |T_m(x) - T_\infty(x)|_{R^N}$$

et la convergence (2.45) entraine la convergence pour ces distance de Hausdorff puisque D_0 est borné.

Pour les complémentaires, on remarque que $\forall D_1, D_2, K$ tels que $D_1 \cup D_2 \subset K$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N - D_1} \inf_{y \in \mathbb{R}^N - D_2} |x-y|_{\mathbb{R}^N} \leq \sup_{x \in K - D_1} \inf_{y \in \mathbb{R}^N - D_2} |x-y|_{\mathbb{R}^N}$$

L'inclusion (2.47) est encore vérifiée, i.e. $D_m \subset B(0, \lambda) \forall m$ où $\lambda = r + \text{dist}(\{0\}, D_0)$, donc

$$\begin{aligned} \text{dist}(\mathbb{R}^N - D_m, \mathbb{R}^N - D_\infty) &= \sup_{x \in B(0, \lambda) - T_m(D_0)} \inf_{y \in T_\infty(\mathbb{R}^N - D_0)} |x-y|_{\mathbb{R}^N} + \\ &+ \sup_{x \in B(0, \lambda) - T_\infty(D_0)} \inf_{y \in T_m(\mathbb{R}^N - D_0)} |y-x|_{\mathbb{R}^N} \leq \\ &\leq \|T_m - T_\infty\|_{L^\infty(T_m^{-1}(B(0, \lambda)); \mathbb{R}^N)} + \|T_m - T_\infty\|_{E^\infty(T_\infty^{-1}(B(0, \lambda)); \mathbb{R}^N)}. \end{aligned}$$

De même qu'on a établi (2.47), on montre que $T_m^{-1}(B(0, \lambda)) \subset B(0, \lambda+r)$, et la convergence (2.45) entraîne la convergence pour la distance de Hausdorff des complémentaires. ■

2.6.3. Construction par passage au quotient.

Soit $\text{Inv}_{k, \sigma}(Q) = \{T \in \mathcal{C}^{k, \sigma} \mid T(Q) = Q\}$; c'est un sous-groupe de $\mathcal{C}^{k, \sigma}$ et on peut définir une relation d'équivalence sur $\mathcal{C}^{k, \sigma}$ par :

$$T_1 \sim T_2 \quad \text{si} \quad T_2 \circ T_1^{-1} \in \text{Inv}_{k, \sigma}(Q) \quad [\text{i.e.} \quad T_1(Q) = T_2(Q)] \quad ,$$

et on note $\mathcal{C}^{k, \sigma} / \text{Inv}_{k, \sigma}(Q)$ l'espace quotient de $\mathcal{C}^{k, \sigma}$ par cette relation d'équivalence.

Il résulte des propriétés des espaces homogènes, cf. BOURBAKI [1], que $\mathcal{D}_Q^{k, \sigma}$ est isomorphe à $\mathcal{C}^{k, \sigma} / \text{Inv}_{k, \sigma}(Q)$.

De plus la pseudo distance $d_{k,\sigma}$ définit sur $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ la topologie quotient (par cette relation d'équivalence) de la topologie de $\mathcal{C}^{k,\sigma}$ (définie par δ_k) ; en effet, \mathcal{O} est ouvert dans $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ si et seulement si

$$\forall D_0 \in \mathcal{O}, \exists \varepsilon > 0 \quad \{D \mid d_{k,\sigma}(D, D_0) < \varepsilon\} \subset \mathcal{O}$$

i.e. d'après (2.38)

$$\forall T_0 \in \mathcal{C}^{k,\sigma} \quad T_0(Q) \in \mathcal{O}, \exists \varepsilon > 0$$

$$\{D \mid \inf_{\substack{T \in \mathcal{C}^{k,\sigma} \\ T(Q)=D}} \delta_k(T, T_0) < \varepsilon\} \subset \mathcal{O}$$

$$\text{i.e. } \forall T_0 \in \mathcal{C}^{k,\sigma} \quad T_0(Q) \in \mathcal{O}, \exists \varepsilon > 0$$

$$\{T \mid \delta_k(T, T_0) < \varepsilon\} \subset \{T \mid T(Q) \in \mathcal{O}\}$$

ce qui est la définition de \mathcal{O} ouvert pour la topologie quotient.

La donnée d'une topologie sur $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ n'est pas suffisante pour notre étude, on a besoin d'une structure uniforme qu'on a définie par $d_{k,\sigma}$.

2.6.4. Contre exemple où $d_{1,\infty}$ n'est pas une pseudo-distance sur $\mathcal{D}_Q^{1,\infty}$.

Nous avons supposé au théorème 2.2. (§ 2.5.2.) que Q était ouvert ou fermé. Nous allons considérer ici le cas où $N=1$ et $Q = \mathbb{Q}$ ensemble des rationnels ; nous allons montrer que

$$(2.50) \quad \mathbb{Q} \cup \{\pi\} \in \mathcal{D}_Q^{1,\infty} \quad \text{et que} \quad d_{1,\infty}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q} \cup \{\pi\}) = 0,$$

ce qui établit que $d_{1,\infty}$ n'est pas une distance sur $\mathcal{D}_Q^{1,\infty}$.

Etant donné $\varepsilon > 0$, on se donne $p_\varepsilon \in \mathbb{Q}$ tel que $|p_\varepsilon - \pi| < \varepsilon$, et une

suite $\{\pi_n^\varepsilon\}_{n \in \mathbb{Z} - \{0\}}$ telle que $\pi_n^\varepsilon \in \mathbb{Q}$ et $|\pi_n^\varepsilon - \pi - \frac{1}{n}| < \frac{\varepsilon}{n^2}$.

On définit alors une application T_ε de \mathbb{R} dans lui-même par

$$T_\varepsilon(p_\varepsilon) = \pi$$

$$T_\varepsilon(p_\varepsilon + \frac{1}{n}) = \pi_n^\varepsilon \text{ et } T_\varepsilon \text{ est affine sur } [p_\varepsilon + \frac{1}{n+1}, p_\varepsilon + \frac{1}{n}] \text{ , pour } n \leq -2 \text{ ou } n > 1$$

$$T_\varepsilon(x) = x + \pi_1^\varepsilon - p_\varepsilon - 1 \quad \text{si } x > p_\varepsilon + 1$$

$$T_\varepsilon(x) = x + \pi_{-1}^\varepsilon - p_\varepsilon + 1 \quad \text{si } x \leq p_\varepsilon - 1$$

On vérifie que $T_\varepsilon(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \cup \{\pi\}$ et que $T_\varepsilon \in \mathcal{V}^{1,\infty}$ avec $\|T_\varepsilon - \text{Id}\|_1 \leq c \cdot \varepsilon$, le lemme 2.4. i) montre alors que $T_\varepsilon \in \mathcal{C}^{1,\infty}$ avec $\delta_k(I, T) \leq c' \cdot \varepsilon$ de sorte que $d_{1,\infty}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q} \cup \{\pi\}) \leq c' \cdot \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$ ce qui établit (2.50). ■

2.7. OUVERTS A BORD REGULIER .

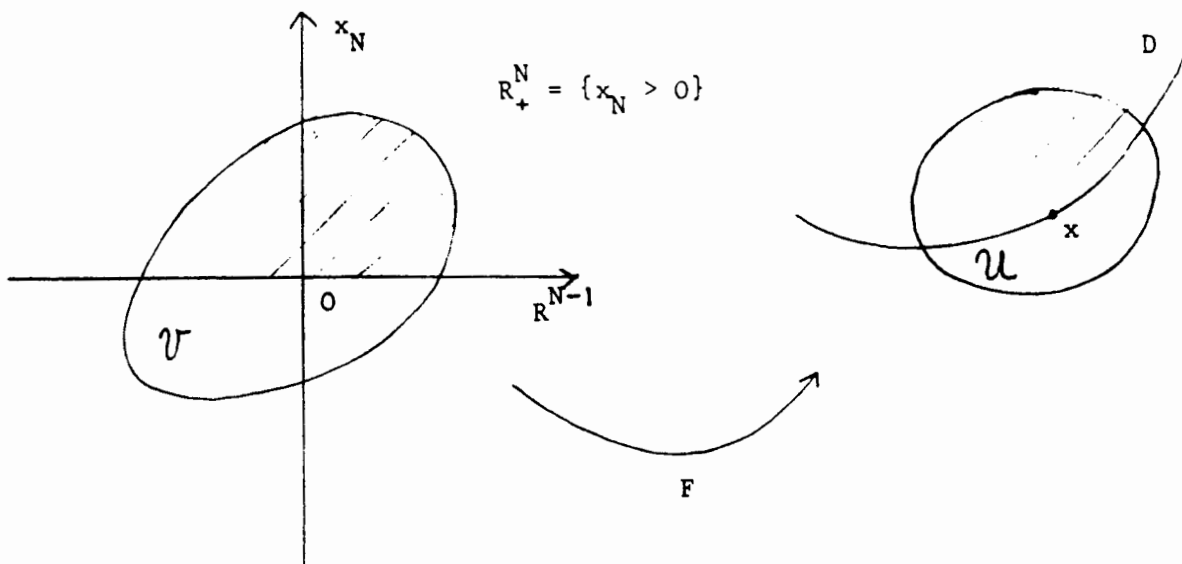
On a défini les espaces $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ de domaines homéomorphes et on les a munis de structures métriques sans faire d'hypothèses de régularité sur les (bords des) domaines mais seulement sur les homéomorphismes. On va dans ce paragraphe rappeler des définitions de régularité de la frontière des ouverts et étudier dans quelle mesure les domaines de $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ sont réguliers si Q l'est ; si Q est régulier, on se pose la question de savoir si $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ est l'ensemble des domaines réguliers et homéomorphes à Q .

2.7.1. Ouverts de classe $W^{k,\sigma}$.

DEFINITION 2.3.

On dira qu'un ouvert D de \mathbb{R}^N est de classe $W^{k,\sigma}$, où $k = 0$ et $\sigma = \bar{c}$, ou $k \geq 1$ et $\sigma = \infty$ ou \bar{c} , si sa frontière ∂D est une variété de dimension $N-1$ de classe $W^{k,\sigma}$, D étant localement d'un seul côté de ∂D , c'est à dire si :

$$(2.51) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in \partial D, \text{ il existe un voisinage } \mathcal{U} \text{ de } x, \text{ un voisinage } \mathcal{V} \text{ de } 0 \text{ et} \\ \text{un difféomorphisme } F \text{ de classe } (1) W^{k,\sigma} \text{ de } \mathcal{V} \text{ sur } \mathcal{U} \text{ tels que } F(0)=x, \\ F(\mathcal{V} \cap \mathbb{R}_+^N) = \mathcal{U} \cap D. \end{array} \right. \quad \blacksquare$$



On définit de façon analogue les ouverts de classe $W^{k,\sigma}$ par morceaux en remplaçant dans la définition (2.51) \mathbb{R}_+^N par un polyèdre quelconque Δ de \mathbb{R}^N , tel que $0 \in \partial\Delta$ (Δ dépendant naturellement de x).

On a la propriété de stabilité suivante :

$$(2.52) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{si } Q \text{ est un ouvert de classe } W^{k,\sigma}, \text{ où } k=0 \text{ et } \sigma=\bar{c}, \text{ ou } k \geq 1 \text{ et } \sigma=\infty \text{ ou } \bar{c} \\ \text{tout domaine } D \in \mathcal{D}_Q^{k,\sigma} \text{ est un ouvert de classe } W^{k,\sigma}. \end{array} \right.$$

En effet les cartes F de Q composées avec T tel que $T(Q)=D$, $T \in \mathcal{C}^{k,\sigma}$, forment un atlas de D , de classe $W^{k,\sigma}$.

(1) i.e. $F \in W^{k,\sigma}(\mathcal{V}, \mathcal{U})$, $F^{-1} \in W^{k,\sigma}(\mathcal{U}, \mathcal{V})$

Réciproquement on peut se poser la question suivante : Etant donnés deux ouverts de \mathbb{R}^N , D et Q, de classe $W^{k,\sigma}$, D appartient-il à $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$?

Cette question est liée à la conjecture de Poincaré. Il semble qu'on puisse lui donner la réponse suivante, qui est communément admise en géométrie différentielle : On suppose que la dimension N est inférieure ou égale à 3 (ou supérieure ou égale à 7 !), que D et Q sont des ouverts bornés de classe $W^{k,\bar{c}}$ ($k \geq 1$), homéomorphes entre eux (par un homéomorphisme de \mathbb{R}^N dans lui-même) et que ∂D et ∂Q sont simplement connexes (i.e. tout lacet est homotope à un point). Alors, il existe un C^k difféomorphisme S de \mathbb{R}^N dans lui-même tel que $D = S(Q)$. On en déduit que D appartient à $\mathcal{D}_Q^{k,\bar{c}}$.

On a donc la propriété générale :

On suppose $N \leq 3$ ou $N \geq 7$. Soit Q un ouvert borné de classe $W^{k,\bar{c}}$ ($k \geq 1$), de bord ∂Q simplement connexe. Alors

$$\mathcal{D}_Q^{k,\bar{c}} = \{ D \mid D \text{ ouvert de classe } W^{k,\bar{c}}, D \text{ homéomorphe à } Q \} .$$

REMARQUE 2.10

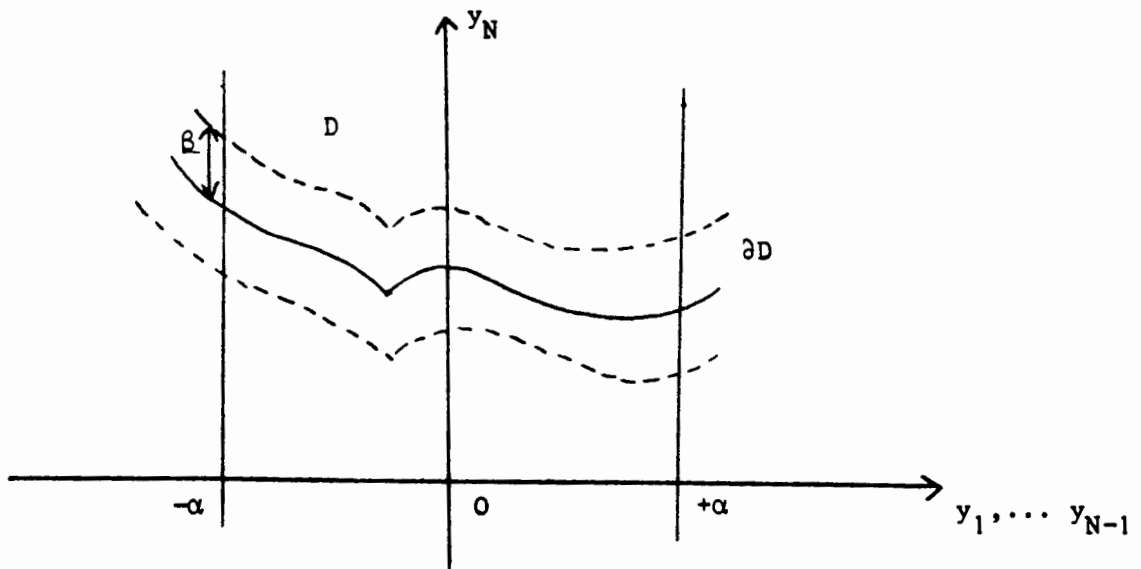
On est amené parfois à considérer des sous ensembles \mathcal{D} de $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ où Q n'est pas de classe $W^{k,\sigma}$: par exemple quand on veut localiser un objet de forme donnée irrégulière Q ouvert, on a $\mathcal{D} = \{Q+p, p \in \mathbb{R}^N\}$, et $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_Q^{k,\sigma} \forall k,\sigma$. De telles familles ne sont évidemment pas constituées d'ouverts de classe $W^{k,\sigma}$. ■

2.7.2. Ouverts localement graphes lipschitziens ou continus.

DEFINITION 2.4.

On dira qu'un ouvert D de \mathbb{R}^N est localement graphe lipschitzien (resp. continu) si sa frontière ∂D est localement le graphe d'une fonction lipschitzienne (resp. continue), c'est à dire si :

$$(2.53) \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in \partial D, \text{ il existe un syst\`eme d'axes } (y_1, \dots, y_N), \text{ des nombres } \alpha > 0 \text{ et } \beta > 0 \\ \text{et une fonction } \Psi \text{ lipschitzienne (resp. continue) sur }]-\alpha, +\alpha[^{N-1} \\ \text{tels que :} \\ \{(y_1, \dots, y_N) \mid |y_1| \leq \alpha, \dots, |y_{N-1}| \leq \alpha, y_N = \Psi(y_1, \dots, y_{N-1})\} \subset \partial D \\ \{(y_1, \dots, y_N) \mid |y_1| \leq \alpha, \dots, |y_{N-1}| \leq \alpha, \Psi(y_1, \dots, y_{N-1}) < y_N < \Psi(y_1, \dots, y_{N-1}) + \beta\} \subset D \\ \{(y_1, \dots, y_N) \mid |y_1| \leq \alpha, \dots, |y_{N-1}| \leq \alpha, \Psi(y_1, \dots, y_{N-1}) - \beta < y_N < \Psi(y_1, \dots, y_{N-1})\} \subset \mathbb{R}^N - D \end{array} \right.$$



REMARQUE 2.11.

NECAS [1] \u00e9tudie de fa\u00e7on plus g\u00e9n\u00e9rale les ouverts localement graphes d'applications de classe $W^{k, \infty}$ (resp. \mathcal{C}^k), pour k entier ou non.

Il co\u00efncident avec les ouverts de classe $W^{k, \infty}$ si $k \geq 2$ (resp. $W^{k, \bar{c}}$ si $k \geq 1$), ce qu'on d\u00e9montre en utilisant le th\u00e9or\u00e8me des fonctions implicites.

Par contre les ouverts localement graphes lipschitziens (qu'il appelle du type $\mathcal{N}^{0,1}$) sont des ouverts de classe $W^{1, \infty}$ mais la r\u00e9ciproque n'est pas vraie comme le montre l'exemple suivant :

Exemple d'ouvert de classe $W^{1, \infty}$ qui n'est pas localement graphe lipschitzien, (d\u00fb \u00e0 ZERNER (communication personnelle)).

Soit $h(x)$ la fonction lipschitzienne sur $(0,1)$, "en dents de scie", d\u00e9finie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} h \text{ nulle en dehors de } [0,1] \\ h(x) = 2\left(x - \frac{1}{3^{n+1}}\right) \quad \text{si} \quad \frac{1}{3^{n+1}} < x < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^{n+1}}\right) \\ h(x) = -2\left(x - \frac{1}{3^n}\right) \quad \text{si} \quad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^{n+1}}\right) \leq x \leq \frac{1}{3^n} \end{array} \right.$$

et soit ρ un nombre positif.

Alors l'ouvert

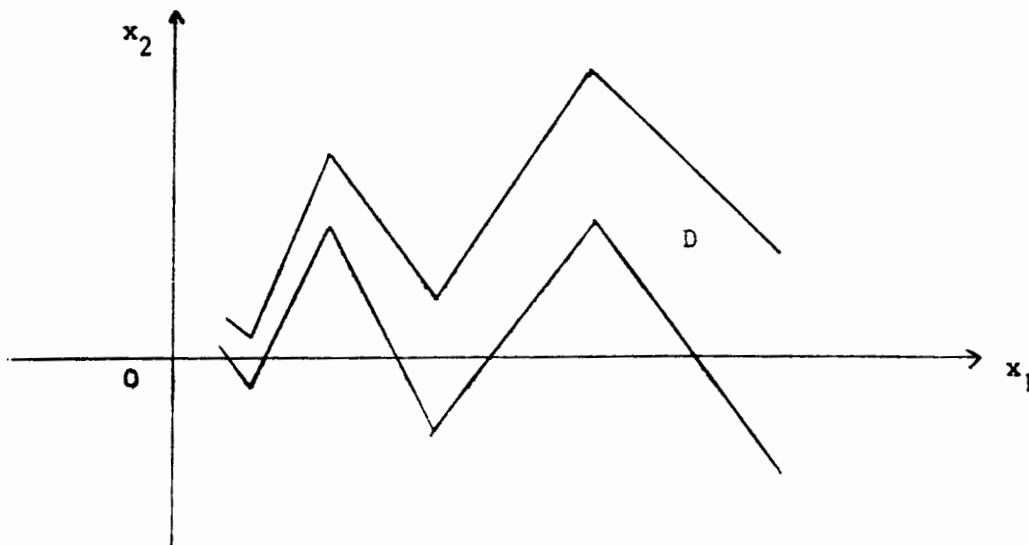
$$D = \{(x_1, x_2) \mid 0 < x_1 < 1, h(x_1) - \rho x_1 < x_2 < h(x_1) + \rho x_1\}$$

est une variété $W^{1,\infty}$ puisque c'est l'image du triangle

$$\{x_1, x_2 \mid 0 < x_1 < 1, -\rho x_1 < x_2 < \rho x_1\}$$

par la bijection de $\mathcal{C}^{1,\infty}$: $(x_1, x_2) \rightarrow (x_1, x_2 + h(x_1))$.

Cependant D n'est pas localement graphe lipschitzien, car le point origine ne vérifie pas l'hypothèse (2.53). ■



Cet exemple montre de plus que si Q est un ouvert localement graphe lipschitzien, tout domaine $D \in \mathcal{D}_Q^{1,\infty}$ n'est pas nécessairement un ouvert localement graphe lipschitzien.

Par contre BENDALI [1] et DJADANE [1] ont établi la stabilité de tels domaines par les éléments de $\mathcal{C}^{1,\bar{c}}$, c'est à dire :

$$(2.54) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Si } Q \text{ est un ouvert localement graphe lipschitzien, tout domaine } D \in \mathcal{D}_Q^{1,\bar{c}} \\ \text{est un ouvert localement graphe lipschitzien.} \end{array} \right.$$

Enfin on démontre, cf. par exemple NECAS [1], qu'un ouvert D localement graphe lipschitzien admet presque partout sur sa frontière ∂D une normale extérieure et de plus on peut définir (comme on le rappelle au chap. IV) une intégrale de surface sur ∂D , si D est borné.

La classe des ouverts localement graphes lipschitziens, intermédiaire entre les ouverts de classe $W^{1,\infty}$ et ceux de classe $W^{1,\bar{c}}$, i.e. \mathcal{C}^1 , est la plus grande dans laquelle nous utiliserons ces propriétés.

III - DERIVATION DANS LES ESPACES DE DOMAINES ET CONDITIONS NECESSAIRESD'OPTIMALITE.3.0. INTRODUCTION

Nous allons dans ce chapitre introduire des notions de dérivation dans les espaces de domaines $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ étudiés au chapitre II, notions dont on vérifiera qu'elles possèdent un certain nombre de propriétés usuelles.

Grâce à ces notions de dérivation nous donnerons des conditions nécessaires pour qu'une fonctionnelle définie sur une famille admissible \mathcal{D}_{ad} de domaines réalise son minimum en un point D ; ces conditions sont analogues à celles des problèmes de contrôle usuels et elles font intervenir l'espace tangent (dans $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$) à la famille \mathcal{D}_{ad} au point D . Nous étudierons donc à titre d'exemple les espaces tangents à un certain nombre de familles \mathcal{D}_{ad} .

On suivra le plan

- 3.1 Notions de dérivation dans les espaces de domaines $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$
- 3.2 Propriétés élémentaires des applications dérivables
- 3.3 Propriétés spécifiques des dérivées dans les espaces de domaines
- 3.4 Conditions nécessaires d'optimalité
- 3.5 Etude de quelques espaces tangents.

3.1 NOTION DE DERIVATION DANS LES ESPACES DE DOMAINES $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$

3.1.1 Généralités

On considère dans ce chapitre des espaces $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$

(3.1) $k \geq 1$, $\sigma = \infty$ ou \bar{c} et Q est un ouvert de \mathbb{R}^N .

La notion de dérivée Fréchet s'introduit généralement dans un espace affine normé A d'espace vectoriel sous-jacent E en utilisant l'addition, application de $A \times E$ dans A .

Etant donné $\theta \in W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ tel que $\|\theta\|_k \leq 1/(2\sqrt{k N^{k+3}})$ on a vu au lemme 2.4 que $I + \theta \in \mathcal{C}^{k,\sigma}$ donc, étant donné $D_0 \in \mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ l'application

Π_{D_0} définie par

$$\Pi_{D_0}(\theta) = (I + \theta)(D_0) = \{x + \theta(x), x \in D_0\}$$

envoie la boule $B(0, 1/(2\sqrt{k N^{k+3}}))$ de $W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ dans $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$.

Nous allons étendre les notions usuelles de dérivation en faisant jouer à $W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ le rôle d'espace vectoriel sous-jacent à $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$, et à l'application $(D_0, \theta) \rightarrow (I + \theta)(D_0) = \Pi_{D_0}(\theta)$ le rôle d'addition de

$\mathcal{D}_Q^{k,\sigma} \times W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ dans $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$.

Bien que l'application Π_{D_0} ne soit pas injective (ce qui entraîne que la "soustraction" associée est multivoque) une telle extension est raisonnable grâce au

LEMME 3.1

Soit $D_0 \in \mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$, l'hypothèse (3.1) étant vérifiée; l'application $\Pi_{D_0} : \theta \rightarrow (I + \theta)(D_0)$ transforme toute base de voisinage de 0 dans la boule $B(0, 1/(2\sqrt{k N^{k+3}}))$ de $W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ en une base de voisinages de Π_{D_0} dans $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$.

Démonstration du lemme 3.1

On va montrer que, $\forall r \leq 1/(2\sqrt{k N^{k+3}})$ on a

$$(3.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \{D \in \mathcal{D}_Q^{k,\sigma} \mid d_{k,\sigma}(D, D_0) < r\} \subset \\ \subset \{\Pi_{D_0}(\theta) \mid \theta \in W^{k,\sigma}(R^N, R^N) \text{ et } \|\theta\|_k < r\} \subset \\ \subset \{D \in \mathcal{D}_Q^{k,\sigma} \mid d_{k,\sigma}(D, D_0) < (1 + \varepsilon_k)r\} \end{array} \right.$$

où ε_k est une constante positive définie au lemme 2.4. En effet

i) Si $D \in \mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ vérifie $d_{k,\sigma}(D, D_0) < r$, d'après la définition (2.36).

il existe $T \in \mathcal{G}^{k,\sigma}$ tel que $T(D_0) = D$ et $r > \delta_k(T, I) \geq \|T - I\|_k$.

ii) Si $\theta \in W^{k,\sigma}(R^N, R^N)$ vérifie $\|\theta\|_k < r$, on a vu au lemme 2.4 que

$I + \theta \in \mathcal{G}^{k,\sigma}$ et $\|(I + \theta)^{-1} - I\|_k < \varepsilon_k r$ de sorte que

$$d_{k,\sigma}((I + \theta)(D_0), D_0) \leq \delta_k(I + \theta, I) < (1 + \varepsilon_k)r \quad \blacksquare$$

3.1.2 Définition des notions de dérivation.

DEFINITION 3.1

Soit J une application définie sur un ouvert \mathcal{D} de $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$, où $k \geq 1$ et $\sigma = \infty$ ou \bar{c} , à valeurs dans un espace de Banach F .

On dira que J est dérivable de $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ dans F au point $D_0 \in \mathcal{D}$ si l'application $J_{D_0}^* = J \circ \Pi_{D_0} : \theta \rightarrow J((I + \theta)(D_0))$, qui est définie sur un voisinage de 0 de $W^{k,\sigma}(R^N, R^N)$ à valeurs dans F , est dérivable au point 0; on dira alors que la dérivée de J au point D_0 est

$$\frac{\partial J}{\partial D}(D_0) = \frac{\partial J_{D_0}^*}{\partial D}(0) \in \mathcal{L}_c(W^{k,\sigma}(R^N, R^N); F). \quad \blacksquare$$

Cette définition s'explicité selon le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 (I + \theta)(D_0) \in \mathcal{D}_Q^{k,\sigma} & \xrightarrow{J} & J((I + \theta)(D_0)) \in F \\
 \uparrow \Pi_{D_0} & & \uparrow J_{D_0}^* \\
 \theta \in W^{k,\sigma}(R^N, R^N) & &
 \end{array}$$

La définition usuelle de la dérivée montre que J est dérivable au point D_0 si et seulement si

$$(3.3) \quad \left\{ \begin{array}{l}
 \text{Il existe une application linéaire continue de } W^{k,\sigma}(R^N, R^N) \text{ dans } F \\
 \text{notée } \frac{\partial J}{\partial D}(D_0) \text{ telle que} \\
 J((I + \theta)(D_0)) = J(D_0) + \frac{\partial J}{\partial D}(D_0) \cdot \theta + r(\theta) \quad \forall \theta \in W^{k,\sigma}(R^N, R^N) \\
 \text{où } \frac{\|r(\theta)\|_F}{\|\theta\|_k} \rightarrow 0 \text{ quand } \|\theta\|_k \rightarrow 0.
 \end{array} \right.$$

DEFINITION 3.2

Soit G une application définie sur un ouvert \mathcal{E} d'un espace de Banach E à valeurs dans $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$, où $k \geq 1$ et $\sigma = \infty$ ou \bar{c} .

On dira que G est dérivable de E dans $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ au point $e_0 \in \mathcal{E}$ s'il existe une application $\star G_{e_0}$ définie sur un voisinage de e_0 de E à valeurs dans $W^{k,\sigma}(R^N, R^N)$ telle que

$$(3.4) \quad \left\{ \begin{array}{l}
 \star G_{e_0}(e_0) = 0 \\
 G = \Pi_{G(e_0)} \circ \star G_{e_0} \quad \text{i.e.} \quad G(e) = (I + \star G_{e_0}(e))(G(e_0)), \quad \forall e \\
 \star G_{e_0} \text{ est dérivable au point } e_0
 \end{array} \right.$$

on dira alors que G admet pour dérivée au point e_0

$$\frac{\partial \star G_{e_0}}{\partial e}(e_0) \in \mathcal{L}_c(E; W^{k,\sigma}(R^N, R^N))$$

et on appelle dérivée multivoque de G au point e_0 l'ensemble des dérivées

noté

$$\frac{\partial G}{\partial e}(e_0) = \left\{ \frac{\partial \star G_{e_0}}{\partial e}(e_0) \right\} .$$

Cette définition s'explicité selon le schéma suivant

$$\begin{array}{ccc} e \in E & \xrightarrow{G} & (I + \star G_{e_0}(e))(G(e_0)) \in \mathcal{D}_Q^{k,\sigma} \\ & \searrow \star G_{e_0} & \uparrow \Pi_{G(e_0)} \\ & & \star G_{e_0}(e) \in W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \end{array}$$

La définition usuelle de la dérivée montre que G est dérivable au point e_0 si et seulement si

$$(3.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe une application linéaire continue } \gamma \text{ de } E \text{ dans } W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \\ \text{et une application } r \text{ de } E \text{ dans } W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \text{ telles que} \\ G(e_0 + f) = (I + \gamma \cdot f + r(f))(G(e_0)) \quad \forall f \in E \\ \text{où } \frac{\|r(f)\|_k}{\|f\|_E} \rightarrow 0 \quad \text{quand } \|f\|_E \rightarrow 0 ; \end{array} \right.$$

alors $\gamma \in \frac{\partial G}{\partial e}(e_0)$.

REMARQUE 3.1

On utilisera parfois les conditions nécessaires et suffisantes de dérivabilité suivantes :

$$(3.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe une application } s \text{ définie sur un voisinage de } e_0 \text{ de } E \text{ à} \\ \text{valeurs dans } \mathcal{U}^{k,\sigma} \text{ telle que} \\ s(e_0) = I, \quad G(e) = (s(e))(G(e_0)) \quad \forall e \\ \text{et qui est dérivable au point } e_0 ; \end{array} \right.$$

alors $\frac{\partial s}{\partial e}(e_0) \in \frac{\partial G}{\partial e}(e_0)$.

$$(3.7) \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe une application } S \text{ définie sur un voisinage de } e_0 \text{ de } E, \text{ à} \\ \text{valeurs dans } \mathcal{V}^{k,\sigma} \text{ telle que} \\ S(e_0) \in \mathcal{C}_0^{k,\sigma}, \quad G(e) = (S(e))(Q) \quad \forall e \\ \text{et qui est dérivable au point } e_0 ; \end{array} \right.$$

alors γ défini par $\gamma.f = \left(\frac{\partial S}{\partial e}(e_0) \cdot f\right) \circ (S(e_0))^{-1} \quad \forall f \in E$ appartient à $\frac{\partial G}{\partial e}(e_0)$.

En effet, d'une part (3.6) est équivalent à la définition 3.2 en posant $s(e) = I + \star G_{e_0}(e)$. D'autre part si G est dérivable (3.7) est vérifié avec $S(e) = I + \star G_{e_0}(e)$; réciproquement (3.7) entraîne que G est dérivable en posant $\star G_{e_0}(e) = (S(e)) \circ (S(e_0))^{-1} - I$.

3.1.3 Exemples d'applications dérivables.

i) On verra au chapitre IV que, étant donnés f et D_0 assez réguliers, les applications $D \mapsto \int_D f \, dx$ et $D \mapsto \int_{\partial D} f \, d\sigma$ sont dérivables ⁽¹⁾ de $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ dans \mathbb{R} au point D_0 avec pour tout θ appartenant à $W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$

$$\frac{\partial \left(\int_D f \, dx \right)}{\partial D} (D_0) \cdot \theta = \int_{\partial D_0} \langle n, \theta \rangle f \, d\sigma$$

où n est la normale extérieure à la frontière ∂D_0 , et

$$\frac{\partial \left(\int_{\partial D} f \, d\sigma \right)}{\partial D} (D_0) \cdot \theta = \int_{\partial D_0} \langle n, \theta \rangle \left(\frac{\partial f}{\partial n} + Hf \right) d\sigma$$

où H est la courbure moyenne de ∂D_0 .

En particulier les applications qui à un domaine associent son volume, ou la surface de son bord ⁽¹⁾, ou encore son centre de gravité, sont dérivables de $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ dans \mathbb{R} (ou \mathbb{R}^N) au point D_0 .

(1) On n'établira pas le second résultat dans le cas $k = 1, \sigma = \infty$.

ii) Etant donné $D_0 \in \mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$, où $k \geq 1$ et $\sigma = \infty$ ou \bar{c} , l'application $\Pi_{D_0} : \theta \rightarrow (I + \theta)(D_0)$ est dérivable de $W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ dans $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ au point 0 et $\frac{\partial \Pi_{D_0}}{\partial \theta} \ni \text{Id}$ (identité de $W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$).

Etant donné $T \in \mathcal{C}^{k,\sigma}$ l'application $\tau \rightarrow (T + \tau)(D_0)$ est dérivable de $W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ dans $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ au point 0 et l'application $\theta \rightarrow \theta \circ T^{-1}$ appartient à $\frac{\partial (T + \tau)(D_0)}{\partial \tau}(0)$.

Le premier résultat découle trivialement de la définition 3.2 et le second découle de (3.7).

3.2. PROPRIETES ELEMENTAIRES DES APPLICATIONS DERIVABLES.

Nous allons montrer maintenant que les fonctions dérivables au sens où nous les avons définies possèdent un certain nombre de propriétés des fonctions dérivables au sens usuel : elles sont localement lipschitziennes, la composée de deux fonctions dérivables est dérivable, et une fonction dérivable sur $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ est dérivable sur $\mathcal{D}_Q^{k+1,\sigma}$.

3.2.1. Les applications dérivables sont localement lipschitziennes.

L'espace $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ étant muni de sa pseudo-distance $d_{k,\sigma}$ on a une notion de fonction lipschitzienne. Nous allons montrer que la notion de fonction dérivable est plus forte :

PROPOSITION 3.1.

Soit J une application de $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$, où $k \geq 1$ et $\sigma = +\infty$ ou \bar{c} , dans un espace de Banach F.

i) Si J est dérivable en un point D_0 , il existe $c_1 \geq 0$ et $r > 0$ tels que

$$\| J(D) - J(D_0) \|_F \leq c_1 d_{k,\sigma}(D, D_0) \quad \forall D, \quad d_{k,\sigma}(D, D_0) \leq r$$

ii) Si J est dérivable en tout point d'un ensemble convexe $B^{(1)}$, de $d_{k,\sigma}$ diamètre inférieur à $1/2\sqrt{k N^{k+3}}$, et vérifie :

$$\| \frac{\partial J}{\partial D}(D_0) \|_{\mathcal{L}_c(W^{k,\sigma}(R^N, R^N); F)} \leq M \quad \forall D_0 \in B$$

alors il existe c_2 tel que

$$\| J(D_2) - J(D_1) \|_F \leq c_2 d_{k,\sigma}(D_1, D_2) \quad \forall D_1, D_2 \in B \quad \blacksquare$$

PROPOSITION 3.2.

Soit G une application d'un espace de Banach E dans $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$, où $k \geq 1$ et $\sigma = +\infty$ ou \bar{c} . Si G est dérivable en un point e_0 , il existe $c_1 \geq 0$ et $r > 0$ tels que :

$$\forall e \quad \| e - e_0 \|_E \leq r, \quad \text{on a } d_{k,\sigma}(G(e), G(e_0)) \leq c_1 \| e - e_0 \|_E \quad \blacksquare$$

Avant de montrer ces propositions, notons qu'il résulte des inclusions

(3.2) que l'on a pour $r \leq 1/2\sqrt{k N^{k+3}}$,

$$(3.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \{ \Pi_{D_0}(\theta) \mid \theta \in W^{k,\sigma}(R^N, R^N), \|\theta\|_k = r \} \subset \\ \subset \{ D \in \mathcal{D}_Q^{k,\sigma} \mid r \leq d_{k,\sigma}(D, D_0) \leq (1 + \varepsilon_k) r \} \end{array} \right.$$

$$(3.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \{ D \in \mathcal{D}_Q^{k,\sigma} \mid d_{k,\sigma}(D, D_0) = r \} \subset \\ \subset \{ \Pi_{D_0}(\theta) \mid \theta \in W^{k,\sigma}(R^N, R^N), \frac{r}{1+\varepsilon_k} \leq \|\theta\|_k \leq r \} \end{array} \right.$$

⁽¹⁾ convexe au sens suivant : si D_1 et D_2 appartiennent à B et si $(I + \theta)(D_1) = D_2$, alors $(I + t\theta)(D_1) \in B \quad \forall t \in [0, 1]$.

Démonstration de la proposition 3.1.

i) Etant donné $D \in \mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ tel que $d_{k,\sigma}(D, D_0) \leq r \leq 1/2 \sqrt{k N^{k+3}}$
 il existe d'après (3.11) $\theta \in W^{k,\sigma}(R^N, R^N)$ tel que $D = \Pi_{D_0}(\theta)$ et
 $\|\theta\|_k \leq d_{k,\sigma}(D, D_0)$. Or $J(D) = (J \circ \Pi_{D_0})(\theta) = J_{D_0}^*(\theta)$ et $J_{D_0}^*$ étant dérivable
 en zéro, on a, pour r assez petit :

$$(3.12) \quad \|J(D) - J(D_0)\|_F = \|J_{D_0}^*(\theta) - J_{D_0}^*(0)\|_F \leq c_1 \|\theta\|_k \leq c_1 d_{k,\sigma}(D, D_0)$$

ce qui établit la première partie de la proposition.

ii) Etant donnés D_1 et D_2 deux points de B , on a

$$d_{k,\sigma}(D_1, D_2) \leq 1/2 \sqrt{k N^{k+3}}$$

et d'après (3.11) , il existe $\theta \in W^{k,\sigma}(R^N, R^N)$ tel que

$$(3.13) \quad (I + \theta)(D_1) = D_2 \quad \text{et} \quad \|\theta\|_k \leq d_{k,\sigma}(D_1, D_2) .$$

Considérons la fonction $j : t \rightarrow j(t) = J((I + t\theta)(D_1))$, définie sur $[0, 1]$ à valeurs dans F . On a :

$$j(0) = J(D_1) \quad j(1) = J(D_2)$$

Nous allons montrer que j est dérivable en tout point $t_0 \in]0, 1[$ et que sa dérivée est bornée, ce qui implique que j est l'intégrale de sa dérivée. On a

$$I + t\theta = (I + (t - t_0)\theta \circ (I + t_0\theta)^{-1}) \circ (I + t_0\theta)$$

d'où

$$(3.14) \quad \left\{ \begin{aligned} j(t) &= J((I + t\theta)(D_1)) \\ &= J((I + (t - t_0)\theta \circ (I + t_0\theta)^{-1})(I + t_0\theta)(D_1)) \\ &= J_{(I + t_0\theta)(D_1)}^*((t - t_0)\theta \circ (I + t_0\theta)^{-1}) \end{aligned} \right.$$

L'application J est dérivable en $(I + t_0 \theta)(D_1) \in B$, donc d'après la définition 3.1 $J^*_{(I + t_0 \theta)(D_1)}$ est dérivable en zéro, de sorte que (3.14)

montre que l'application j est dérivable en tout point $t_0 \in]0,1[$, avec :

$$\begin{aligned} \frac{\partial j}{\partial t}(t_0) &= \frac{\partial J^*_{(I + t_0 \theta)(D_1)}}{\partial \theta}(0) \cdot (\theta \circ (I + t_0 \theta)^{-1}) \\ &= \frac{\partial J}{\partial D}((I + t_0 \theta)(D_1)) \cdot (\theta \circ (I + t_0 \theta)^{-1}) \end{aligned}$$

On a donc la majoration :

$$\left\| \frac{\partial j}{\partial t}(t_0) \right\|_F \leq M \|\theta \circ (I + t_0 \theta)^{-1}\|_k \quad \forall t_0 \in]0,1[$$

et en utilisant les majorations (2.9 bis) et (2.22), il vient

$$\left\| \frac{\partial j}{\partial t}(t_0) \right\|_F \leq M \beta'_k \|\theta\|_k (1 + \epsilon_k t_0 \|\theta\|_k)^k \leq c_2 \|\theta\|_k$$

où $c_2 = M \beta'_k \left(1 + \frac{\epsilon_k}{2\sqrt{kN^{k+3}}}\right)^k$. On a donc :

$$\|j(1) - j(0)\|_F = \left\| \int_0^1 \frac{\partial j}{\partial t}(t_0) dt_0 \right\|_F \leq c_2 \|\theta\|_k$$

et (3.13) donne :

$$\|J(D_2) - J(D_1)\|_F \leq c_2 d_{k,\sigma}(D_1, D_2) \quad \blacksquare$$

Démonstration de la proposition 3.2.

L'application G étant dérivable en e_0 , on a d'après la définition 3.2

$$G(e) = (I + {}^*G_{e_0}(e))(G(e_0)) \quad \text{si } \|e - e_0\|_E \text{ assez petit}$$

où ${}^*G_{e_0}$ est dérivable en e_0 et où ${}^*G_{e_0}(e_0) = 0$.

D'après (3.11), on a donc

$$(3.15) \quad d_{k,\sigma}(G(e), G(e_0)) \leq (1 + \epsilon_k) \|{}^*G_{e_0}(e)\|_k \leq c_1 \|e - e_0\|_E$$

si $\|e - e_0\|_E$ est assez petit. \blacksquare

3.2.2. Dérivation des applications composées.PROPOSITION 3.3.

Soit G une application d'un espace de Banach E dans $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$, où $k \geq 1$ et $\sigma = \infty$ ou \bar{c} , et soit J une application de $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ à valeurs dans un espace de Banach F .

Si G est dérivable au point e_0 et si J est dérivable au point $G(e_0)$, alors $J \circ G$ est dérivable (au sens usuel) de E dans F au point e_0 et on a :

$$(3.16) \quad \frac{\partial(J \circ G)}{\partial e}(e_0) = \frac{\partial J}{\partial D}(G(e_0)) \circ \gamma \quad \forall \gamma \in \frac{\partial G}{\partial e}(e_0). \quad \blacksquare$$

Démonstration de la proposition 3.3.

D'après la définition 3.2, il existe une application ${}^*G_{e_0}$ nulle et dérivable en 0, telle que $G = \Pi_{G(e_0)} \circ {}^*G_{e_0}$ dans un voisinage de e_0 . On peut donc écrire $J \circ G = J \circ \Pi_{G(e_0)} \circ {}^*G_{e_0} = J^*_{G(e_0)} \circ {}^*G_{e_0}$, et il ne reste qu'à appliquer le résultat usuel de dérivation des applications composées. \blacksquare

On établit de façon analogue les résultats suivants :

PROPOSITION 3.4.

Soit J une application de $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$, où $k \geq 1$ et $\sigma = +\infty$ ou \bar{c} , à valeurs dans un espace de Banach F , et soit K une application de F dans un espace de Banach W .

Si J est dérivable au point D_0 et si K est dérivable au point $J(D_0)$, alors $K \circ J$ est dérivable de $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ dans W au point D_0 , et on a :

$$(3.17) \quad \frac{\partial(K \circ J)}{\partial D}(D_0) = \frac{\partial K}{\partial F}(J(D_0)) \circ \frac{\partial J}{\partial D}(D_0) \quad \blacksquare$$

PROPOSITION 3.5.

Soit H une application d'un espace de Banach V dans un espace de Banach E, et G une application de E dans $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$, où $k \geq 1$ et $\sigma = \infty$ ou \bar{c} .

Si H est dérivable au point v_0 et si G est dérivable au point $H(v_0)$, alors $G \circ H$ est dérivable de V dans $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ au point v_0 et on a :

$$(3.18) \quad \gamma \circ \frac{\partial H}{\partial v}(v_0) \in \frac{\partial(G \circ H)}{\partial v}(v_0) \quad \forall \gamma \in \frac{\partial G}{\partial e}(H(v_0)) \quad \blacksquare$$

REMARQUE 3.2.

On pourrait définir des fonctions Gateaux-dérivable dans les espaces de domaines $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$, mais cette notion est trop faible : en effet, elle ne permet pas de dériver les applications composées, ce qui est essentiel pour l'obtention de conditions nécessaires d'optimalité quand la famille admissible \mathcal{D}_{ad} ne contient pas de segments $(I + t\theta)(D)$, $0 \leq t \leq t_0$ (cf paragraphe 3.4) \blacksquare

3.2.3. Dérivabilité sur des espaces plus petits, ou à valeurs dans des espaces plus grands.

PROPOSITION 3.6.

Soit J une application de $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$, où $k \geq 1$, $\sigma = \infty$ ou \bar{c} , dans un espace de Banach E, dérivable en un point D_0 . Alors J est dérivable de $\mathcal{D}_Q^{k',\sigma'}$ dans E au point D_0 pour $k' = k$, $\sigma' = \bar{c}$ et pour $k' > k$, $\sigma' = \infty$ ou \bar{c} . \blacksquare

PROPOSITION 3.7.

Soit G une application d'un espace de Banach E à valeurs dans $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ où $k \geq 1$, $\sigma = \infty$ ou \bar{c} , dérivable en un point e_0 . Alors G est dérivable de E dans $\mathcal{D}_Q^{k',\sigma'}$ au point e_0 pour $k' = k$, $\sigma' = \infty$ et pour $k > k' \geq 1$, $\sigma' = \infty$ ou \bar{c} . \blacksquare

On établit ces deux propositions en utilisant les définitions 3.1. et 3.2 et le fait que l'injection de $W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ est linéaire continue, donc dérivable, pour $k = k'$, $\sigma' = \infty$ $\sigma = \bar{c}$ et $k' < k$ $\sigma = \infty$ ou \bar{c} , $\sigma' = \infty$ ou \bar{c} . ■

3.3. PROPRIETES SPECIFIQUES DES DERIVEES DANS LES ESPACES DE DOMAINES.

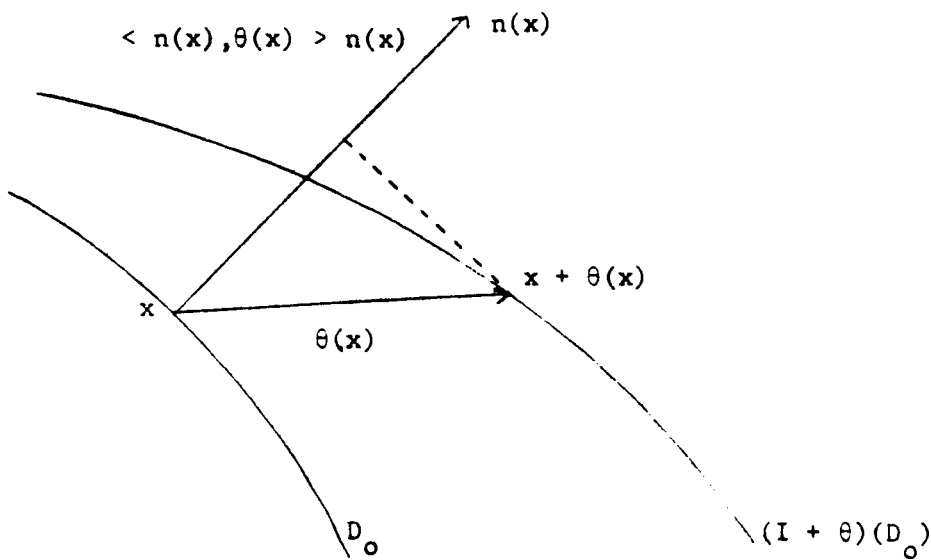
Nous avons vu au paragraphe 3.1.1 que l'application $(D, \theta) \rightarrow (I + \theta)D$ peut jouer le rôle d'addition; cette application n'étant pas injective, il en résulte que la "soustraction" correspondante est une opération multivoque, et on va démontrer les propriétés suivantes

i) Etant donné J une application de $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ à valeurs dans un espace de Banach F , dérivable au point D_0 , la dérivée $\frac{\partial J}{\partial D}(D_0) \cdot \theta$ dans la direction θ ne dépend de θ que par sa trace normale sur $\partial D_0 < n, \theta >$.

ii) Etant donné G une application d'un espace de Banach E à valeurs dans $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$, dérivable au point e_0 et γ un élément de sa dérivée multivoque $\frac{\partial G}{\partial e}(e_0) \subset \mathcal{L}_c(E; W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N))$, on a $\frac{\partial G}{\partial e}(e_0) \subset \{\gamma + \eta\}$ où η parcourt l'ensemble des applications linéaires continues de E dans l'ensemble des champs de vecteurs de $W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ tangents au bord de $G(e_0)$.

Nous allons montrer exactement ces deux résultats pour $\sigma = \bar{c}$, en faisant des hypothèses de régularité sur les bords de D_0 et $G(e_0)$, et en supposant $E = \mathbb{R}$ pour le second résultat. Dans les autres cas, on aura des résultats plus faibles.

Ces propriétés s'interprètent géométriquement en observant que, si θ est voisin de 0, $(I + \theta_1)(D_0)$ est égal à $(I + \theta_2)(D_0)$ au second ordre près en θ si et seulement si $\langle n, \theta_1 \rangle = \langle n, \theta_2 \rangle$ sur ∂D_0 , comme l'indique le schéma :



Il en résulte que "moralement" :

- i) $(I + \theta + \tau)(D_0)$ définit le même domaine (au 2ème ordre près en θ) que $(I + \theta)(D_0)$ si et seulement si $\langle n, \tau \rangle = 0$ sur ∂D_0 .
- ii) La différence entre $(I + \theta)(D_0)$ et D_0 ne dépend au second ordre près que de $\langle n, \theta \rangle$ sur ∂D_0 .

Pour démontrer ces résultats, nous allons utiliser des propriétés de la bijection de \mathbb{R}^N associée à un champ de vecteurs.

3.3.1. Propriétés de la bijection associée à un champ de vecteurs.

Etant donné un champ $\tau \in W^{k, \sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ où $k \geq 1$ et $\sigma = +\infty$ ou \bar{c} , on considère l'équation différentielle, définie pour toute donnée initiale $x \in \mathbb{R}^N$:

$$(3.19) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dh}(h) = \tau(y(h)) \\ y(0) = x \end{cases}$$

Cette équation différentielle a une solution unique $h \rightarrow y(h, x, \tau)$ qui est dans $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$ et qui possède les 2 propriétés :

$$(3.20) \quad y(h + h', x, \tau) = y(h, y(h', x, \tau), \tau) \quad \forall h, h' \in \mathbb{R}$$

$$(3.21) \quad y(\lambda h, x, \tau) = y(h, x, \lambda \tau) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

On définit alors pour τ donné une application de \mathbb{R}^N dans lui-même par $e^\tau(x) = y(1, x, \tau)$

D'après (3.20) et (3.21) e^τ est une bijection de \mathbb{R}^N d'inverse $e^{-\tau}$ et on a $e^0 = I$

Notons que $h \rightarrow e^{h\tau}(x)$ est la solution de (3.19).

En effet :

$$(3.22) \quad e^{h\tau}(x) = y(1, x, h\tau) = y(h, x, \tau).$$

LEMME 3.2.

Soit D un ouvert de \mathbb{R}^N , de classe C^1 , et soit $\tau \in W^{1, \infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$

tel que

$$\langle n, \tau \rangle = 0 \quad \text{sur } \partial D$$

$$\text{Alors} \quad e^{h\tau}(D) = D \quad \forall h \in \mathbb{R}. \quad \blacksquare$$

Démonstration du lemme 3.2.

Le champ τ étant tangent à la variété ∂D , on montre (cf. par exemple L. SCHWARTZ [1]) que si $x \in \partial D$, $e^{h\tau}(x)$ appartient à ∂D pour tout h .

$$\text{On en déduit } e^{h\tau}(\partial D) \subset \partial D$$

$$e^{-h\tau}(\partial D) \subset \partial D$$

$$\partial D = e^{+h\tau}(e^{-h\tau}(\partial D)) \subset e^{h\tau}(\partial D)$$

$$\text{et donc } e^{h\tau}(\partial D) = \partial D \quad \forall h \in \mathbb{R}.$$

Soit maintenant $x \in D$; le chemin $\{e^{\lambda\tau}(x) \mid 0 \leq \lambda \leq h\}$ ne rencontre pas ∂D d'après ce qui précède, et le théorème du passage des douanes montre qu'il ne rencontre pas non plus \bar{D} . C'est donc que $e^{h\tau}(x) \in D$.

On en déduit $e^{h\tau}(D) \subset D$, puis $e^{h\tau}(D) = D$ pour tout $h \in \mathbb{R}$, comme ci-dessus. ■

LEMME 3.3. Soit $k \geq 1$.

i) Il existe une boule $B(0, c_k)$ de $W^{k+1, \infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ telle que si $\tau \in B(0, c_k)$ alors e^τ appartient à $\mathcal{C}^{k, \bar{c}}$.

L'application $\tau \rightarrow e^\tau$ est dérivable en zéro, de $W^{k+1, \infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ dans $\mathcal{U}^{k, \bar{c}}$, et on a

$$(3.23) \quad \frac{\partial(e^\tau)}{\partial \tau}(0) \cdot \theta = \theta \quad \forall \theta \in W^{k+1, \infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N).$$

ii) Soit $\tau \in W^{k, \bar{c}}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ à support compact. Alors $e^\tau \in \mathcal{C}^{k, \bar{c}}$

L'application $h \rightarrow e^{h\tau}$ est dérivable en zéro de \mathbb{R} dans $\mathcal{U}^{k, \bar{c}}$

et on a

$$(3.24) \quad \frac{\partial(e^{h\tau})}{\partial h}(0) = \tau \quad \blacksquare$$

REMARQUE 3.3

En perdant de la régularité on a obtenu la dérivabilité Fréchet de $\tau \rightarrow e^\tau$.

Sans perdre de régularité on a obtenu la dérivabilité Gateaux quand $\sigma = \bar{c}$; pour $\sigma = \infty$ cela n'est pas possible comme on peut le montrer en considérant l'exemple suivant en dimension $N = 1$:

$$\tau(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$\tau \in W^{1, \infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\|e^{h\tau} - I - h\tau\|_{W^{1, \infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}$ est de l'ordre de h . ■

Démonstration de la partie i) du lemme 3.3.

i) Nous allons utiliser la théorie des équations différentielles à valeurs dans un espace de Banach.

On se donne $\tau \in W^{k+1, \infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ tel que $\|\tau\|_{k+1} \leq \frac{1}{2^k \beta_k}$, où β_k

est une constante définie par (2.9)^{bis}.

La fonction L définie par

$$(3.25) \quad L(\varphi) = \tau \circ \varphi \quad \forall \varphi \in \mathcal{U}^{k, \bar{c}}$$

envoie $\mathcal{U}^{k, \bar{c}}$ dans $W^{k, \bar{c}}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ et est localement lipschitzienne d'après le lemme 2.2. v).

Considérons l'équation différentielle à valeurs dans l'espace affine de Banach $\mathcal{U}^{k, \bar{c}}$

$$(3.26) \quad \begin{cases} \frac{dY}{dh} = L(Y) \\ Y(0) = I. \end{cases}$$

Le produit de la boule de centre I et de rayon 1 de $\mathcal{U}^{k, \bar{c}}$ par l'intervalle $] -1, 1[$ est un cylindre de sécurité pour (3.26). En effet si $\varphi \in B(I, 1)$ on a d'après (2.9) bis

$$(3.27) \quad \|L(\varphi)\|_k = \|\tau \circ \varphi\|_k \leq \beta_k \|\tau\|_k (1 + \|\varphi - I\|_k)^k \leq \beta_k \|\tau\|_k 2^k < 1$$

Il existe donc une solution unique de (3.26) $Y \in C^1(-1, 1; \mathcal{U}^{k, \bar{c}})$ qui vérifie

$$(3.28) \quad \|Y(h) - I\|_k \leq 1.$$

Nous allons montrer que pour x donné $Y(h)(x)$ vérifie (3.19), donc que $Y(h) = e^{h\tau}$;

en effet l'application $Y(h) \rightarrow Y(h)(x)$ est linéaire continue de $\mathcal{U}^{k, \bar{c}}$ dans \mathbb{R}^N , de sorte que

$$\frac{d}{dh}(Y(h)(x)) = \left(\frac{dY}{dh}(h)\right)(x) = L(Y(h))(x) = (\tau \circ Y(h))(x) = \tau(Y(h)(x))$$

et $Y(0)(x) = x$.

Donc $e^\tau = Y(1)$ et $e^{-\tau} = Y(-1)$ appartiennent à $\mathcal{U}^{k, \bar{c}}$, c'est à dire $e^\tau \in \mathcal{C}^{k, \bar{c}}$.

ii) Montrons que $\tau \rightarrow e^\tau$ est dérivable en zéro. En intégrant (3.26)

entre 0 et 1 on obtient

$$(3.29) \quad e^\tau - I = \int_0^1 \tau \circ e^{h\tau} dh \quad \text{dans } \mathcal{V}^{k, \bar{c}}$$

qu'on majore en utilisant (2.9)^{bis} par

$$\|e^\tau - I\|_k \leq \int_0^1 \|\tau \circ e^{h\tau}\|_k dh \leq \int_0^1 \beta_k \|\tau\|_k (1 + \|e^h - I\|_k)^k dh$$

et avec (3.28),

$$(3.30) \quad \|e^\tau - I\|_k \leq \beta_k \|\tau\|_k 2^k.$$

Il résulte de (3.29) que

$$e^\tau - I - \tau = \int_0^1 (\tau \circ e^{h\tau} - \tau) dh \quad \text{dans } \mathcal{V}^{k, \bar{c}}$$

que l'on majore en utilisant le lemme 2.2.v) par

$$(3.31) \quad \left\{ \begin{aligned} \|e^\tau - I - \tau\|_k &\leq \int_0^1 \|\tau \circ e^{h\tau} - \tau\|_k dh \\ &\leq \int_0^1 \gamma_k \|\tau\|_{k+1} \|e^{h\tau} - I\|_k (1 + \|e^{h\tau} - I\|_k)^k dh \\ &\leq \gamma_k \|\tau\|_{k+1} \beta_k \|\tau\|_k 2^k (1 + 1)^k \leq c^{te} (\|\tau\|_{k+1})^2 \end{aligned} \right.$$

ce qui établit la dérivabilité. ■

Démonstration de la partie ii) du lemme 3.3.

i) L'application $h \rightarrow e^{h\tau}(x)$ étant solution de l'équation différentielle

(3.19), le théorème de dérivabilité de la solution d'une équation différentielle

par rapport à un paramètre (ici x) montre, puisque $\tau \in C^k(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, que

$$(3.32) \quad (h, x) \rightarrow e^{h\tau}(x) \text{ appartient à } C^k(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N; \mathbb{R}^N).$$

D'autre part $e^{h\tau}(x) = x$ si $\tau(x) = 0$ donc $e^{h\tau} - I$ a un support inclus dans celui de τ qui est compact.

On a donc $e^{h\tau} - I \in W^{k, \bar{c}}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \cdot \forall h$, d'où $e^{h\tau}$ et $(e^{h\tau})^{-1} = e^{-h\tau}$ appartiennent à $\mathcal{V}^{-k, \bar{c}}$, c'est à dire $e^{h\tau} \in \mathcal{C}^{k, \bar{c}} \quad \forall h \in \mathbb{R}$.

ii) On va montrer que $e^{h\tau}$ vérifie l'équation intégrale

$$(3.33) \quad e^{h\tau} = I + \int_0^h \tau \circ e^{s\tau} ds \quad \text{dans } \mathcal{V}^{k, \bar{c}}.$$

L'injection de

$\{v \mid v \in C^k([a, b] \times \mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \text{ et } \text{supp } v(h, \cdot) \subset K, K \text{ compact donné de } \mathbb{R}^N\}$
 dans $C^0([a, b]; W^{k, \bar{c}}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N))$ est continue.

Il résulte donc de (3.32) que l'application $h \rightarrow e^{h\tau} - I$ appartient à $C^0(\mathbb{R}; W^{k, \bar{c}}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N))$, c'est à dire que $h \rightarrow e^{h\tau}$ est continue de \mathbb{R} dans $\mathcal{V}^{k, \bar{c}}$; d'après le lemme 2.2 iii) l'application $\varphi \rightarrow \tau \circ \varphi$ est continue de $\mathcal{V}^{k, \bar{c}}$ dans $W^{k, \bar{c}}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, donc l'application $s \rightarrow \tau \circ e^{s\tau}$ est continue à valeurs dans $W^{k, \bar{c}}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ et les deux membres de (3.33) sont définis et appartiennent à $\mathcal{V}^{k, \bar{c}}$.

Il en résulte que, $\forall x \in \mathbb{R}^N$,

$$x + \left(\int_0^h \tau \circ e^{s\tau} ds \right) (x) = x + \int_0^h (\tau \circ e^{s\tau})(x) ds = e^{h\tau}(x)$$

puisque $h \rightarrow e^{h\tau}(x)$ est solution de (3.19), donc de l'équation intégrale associée. L'égalité (3.33) est donc démontrée.

iii) D'après (3.33) on a

$$e^{h\tau} - I - h\tau = \int_0^h (\tau \circ e^{s\tau} - \tau) ds \quad \text{dans } W^{k, \bar{c}}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \| e^{h\tau} - I - h\tau \|_k &\leq \frac{1}{h} \int_0^h \| \tau \circ e^{s\tau} - \tau \|_k ds \\ &\leq \sup_{0 \leq s \leq h} \| \tau \circ e^{s\tau} - \tau \|_k \end{aligned}$$

ce qui tend vers zéro quand $h \rightarrow 0$ puisque $s \rightarrow \tau \circ e^{s\tau}$ est continue à valeurs dans $\mathcal{V}^{k, \bar{c}}$ et vaut τ en zéro.

Ceci achève la démonstration de la partie ii) du lemme 3.3. ■

3.3.2. INDEPENDANCE DE LA DERIVEE D'UNE FONCTION DEFINIE SUR UN ESPACE DE DOMAINES $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ PAR RAPPORT A LA COMPOSANTE TANGENTIELLE DU CHAMP θ .

THEOREME 3.1. Soit J une application de $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$, ou $k \geq 1$, $\sigma = +\infty$ ou \bar{c} , à valeurs dans un espace de Banach F , dérivable en un point D_0 et soient θ_1, θ_2 appartenant à $W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$.

i) Si D_0 est un ouvert borné de classe C^1 , et si

$$(3.34) \quad \begin{cases} \theta_1 - \theta_2 \in C^k(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \\ \langle n, \theta_1 \rangle = \langle n, \theta_2 \rangle \text{ sur } \partial D_0 \end{cases}$$

on a

$$(3.35) \quad \frac{\partial J}{\partial D}(D_0) \cdot \theta_1 = \frac{\partial J}{\partial D}(D_0) \cdot \theta_2 .$$

ii) Si D_0 est un ouvert connexe et si

$$(3.36) \quad \theta_1 = \theta_2 \text{ sur } \partial D_0$$

on a

$$(3.35) \quad \frac{\partial J}{\partial D}(D_0) \cdot \theta_1 = \frac{\partial J}{\partial D}(D_0) \cdot \theta_2 . \quad \blacksquare$$

REMARQUE 3.4.

La partie i) du théorème indique que la dérivée de J dans la direction θ ne dépend que de la composante normale $\langle n, \theta \rangle$ du champ θ sur la frontière.

La partie ii) du théorème signifie que (sans hypothèse de régularité sur ∂D_0), la dérivée de J dans la direction θ ne dépend que de la valeur de θ au bord. \blacksquare

Démonstration de la partie i) du théorème 3.1.

Notons $\tau = \theta_1 - \theta_2$

Soit ϕ une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, égale à 1 sur D_0 . On a $\phi \tau \in W^{k, \bar{c}}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ et $(I + h\tau)(D_0) = (I + h\phi \tau)(D_0) \quad \forall h \in \mathbb{R}$

d'où l'on déduit :

$$(3.37) \quad \frac{\partial J}{\partial D}(D_0) \cdot \tau = \frac{\partial J((I + h\tau)(D_0))}{\partial h}(0) = \frac{\partial J((I + h\phi \tau)(D_0))}{\partial h} = \frac{\partial J}{\partial D}(D_0) \cdot (\phi \tau)$$

Le champ de vecteurs $\phi \cdot \tau$ appartient à $W^{k, \bar{c}}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ et est à support compact. D'après le lemme 3.3 ii), l'application $h \rightarrow e^{h\phi \tau} - I$ est donc dérivable en zéro. On a vu au paragraphe 3.1.3 que l'application $\theta \rightarrow (I + \theta)(D_0)$ est dérivable en zéro et que l'application $\text{Id} : \theta \rightarrow \theta$ de $W^{k, \bar{c}}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ dans lui-même appartient à $\frac{\partial((I + \theta)(D_0))}{\partial \theta}(0)$.

Les propositions 3.3 et 3.5 de dérivation des applications composées montrent que

$$h \rightarrow J((I + (e^{h\phi \tau} - I))(D_0)) = J(e^{h\phi \tau}(D_0))$$

est dérivable en zéro et que :

$$\frac{\partial J(e^{h\phi \tau}(D_0))}{\partial h}(0) = \frac{\partial J}{\partial D}(D_0) \cdot \text{Id} \cdot \frac{\partial (e^{h\phi \tau})}{\partial h}(0) = \frac{\partial J}{\partial D}(D_0) \cdot (\phi \tau)$$

D'autre part, comme $\langle n, \phi \tau \rangle = 0$ sur ∂D_0 , qu'on a supposé de classe C^1 , le lemme 3.2 montre que $e^{h\phi \tau}(D_0) = D_0$. Donc le premier membre est nul, ce qui avec (3.37), démontre la partie i) du théorème. ■

La démonstration de la partie ii) du théorème 3.1 repose sur le :

LEMME 3.4

Soient D un ouvert connexe de \mathbb{R}^N , et $B(x_0, \varepsilon)$ une boule de centre x_0 et de rayon ε contenue dans D .

Pour tout $\tau \in W^{k, \sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, où $k \geq 1$ et $\sigma = \infty$ ou \bar{c} , tel que

$$\|\tau\|_k < \inf \left\{ \varepsilon ; \frac{1}{2\sqrt{k} N^{k+3}} \right\} \quad \text{et} \quad \tau = 0 \quad \text{sur} \quad \partial D$$

on a $(I + \tau)(D) = D$.

Démonstration du lemme 3.4.

Le lemme 2.4 i) montre que $I + \tau$ appartient à $\mathcal{C}^{k, \sigma}$, ce qui entraîne que

$$\partial((I + \tau)(D)) = (I + \tau)(\partial D) = \partial D \quad \text{puisque} \quad \tau = 0 \quad \text{sur} \quad \partial D.$$

D'autre part le point $(I + \tau)(x_0)$ appartient à $(I + \tau)(D) \cap D$

puisque

$$|(I + \tau)(x_0) - x_0|_{\mathbb{R}^N} = |\tau(x_0)|_{\mathbb{R}^N} \leq \|\tau\|_k < \varepsilon .$$

Pour tout point y de D il existe donc un chemin inclus dans D qui relie y à $(I + \tau)(x_0)$. Si y n'appartenait pas à $(I + \tau)(D)$, il existerait, d'après le théorème du passage des douanes, un point du chemin qui appartienne à $\partial((I + \tau)(D))$, c'est-à-dire à ∂D , ce qu'on a interdit. On a donc $y \in (I + \tau)(D)$ ce qui établit l'inclusion $D \subset (I + \tau)(D)$.

L'ensemble $(I + \tau)(D)$ est, comme D , un ouvert connexe puisque $I + \tau$ est un homéomorphisme, et on montre donc de même que $(I + \tau)(D) \subset D$, ce qui achève la démonstration du lemme 3.4. ■

Démonstration de la partie ii) du théorème 3.1.

Notons $\tau = \theta_1 - \theta_2$, et considérons l'application $h \rightarrow J((I + h\tau)(D_0))$ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On vérifie sur la définition 3.2 que l'application $h \rightarrow (I + h\tau)(D_0)$ est dérivable de \mathbb{R} dans $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ au point 0 et admet $\tau \in W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \equiv \mathcal{L}_c(\mathbb{R}; W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N))$ pour dérivée. La proposition 3.3 de dérivation des applications composées montre alors que $h \rightarrow J((I + h\tau)(D_0))$ est dérivable en zéro avec
$$\frac{\partial((I + h\tau)(D_0))}{\partial h}(0) = \frac{\partial I}{\partial D}(D_0) \cdot \tau$$
 Or le lemme 3.4 montre que $(I + h\tau)(D_0) = D_0$ pour h assez petit, donc cette dérivée est nulle, ce qui démontre la partie ii) du théorème 3.1. ■

3.3.3. Ensemble parcouru par la dérivée multivoque d'une application à valeurs dans un espace de domaines $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$.

Soit D un domaine de \mathbb{R}^N localement graphe lipschitzien, il existe alors presque partout sur ∂D une normale extérieure n (cf. § 2.7.2.); étant donné λ une application linéaire continue d'un espace de Banach F dans $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, on dira que λ est tangente au bord D si

$$(3.38) \quad \langle n, \lambda \cdot e \rangle = 0 \quad \forall e \in E.$$

THEOREME 3.2.

Soit G une application d'un espace de Banach E dans $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$, où $k \geq 1$ et $\sigma = \infty$ ou \bar{c} , dérivable au point e_0 .

i) On suppose que le domaine $G(e_0)$ est borné et est localement graphe lipschitzien, alors pour tout γ appartenant à la dérivée multivoque

$\frac{\partial G}{\partial e}(e_0)$ on a :

$$\frac{\partial G}{\partial e}(e_0) \subset \{ \gamma + \eta \mid \eta \in \mathcal{L}_c(E; W^{k,\sigma}(R^N, R^N)) \text{ et } \eta \text{ est tangente au bord de } G(e_0) \} .$$

ii) On suppose que le domaine $G(e_0)$ est de classe C^1 ; s'il existe un élément γ de $\frac{\partial G}{\partial e}(e_0)$ appartenant de plus à $\mathcal{L}_c(E; W^{k+1,\infty}(R^N, R^N))$, alors :

$$\frac{\partial G}{\partial e}(e_0) \supset \{ \gamma + \eta \mid \eta \in \mathcal{L}_c(E; W^{k+1,\infty}(R^N, R^N)) \text{ et } \eta \text{ est tangente au bord de } G(e_0) \} .$$

iii) On suppose que $G(e_0)$ est un ouvert connexe, alors pour tout γ appartenant à la dérivée multivoque $\frac{\partial G}{\partial e}(e_0)$ on a :

$$\frac{\partial G}{\partial e}(e_0) \supset \{ \gamma + \eta \mid \eta \in \mathcal{L}_c(E; W^{k,\sigma}(R^N, R^N)) \text{ et } \eta.f = 0 \text{ sur le bord de } G(e_0) \forall f \in E \} .$$

THEOREME 3.3.

Soit G une application de R dans $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$, où $k \geq 1$ et $\sigma = \infty$ ou \bar{c} , dérivable en un point t_0 . On suppose le domaine $G(t_0)$ borné de classe C^1 ; alors⁽¹⁾

i) si $\sigma = \bar{c}$ on a , $\forall \gamma \in \frac{\partial G}{\partial t}(t_0)$,

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t_0) = \{ \gamma + \eta \mid \eta \in W^{k,\bar{c}}(R^N, R^N) \text{ et } \eta \text{ est tangent au bord de } G(t_0) \} .$$

ii) si $\sigma = \infty$ et s'il existe un élément γ de $\frac{\partial G}{\partial t}(t_0)$ appartenant de plus à $C^k(R^N, R^N)$, alors

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t_0) \supset \{ \gamma + \eta \mid \eta \in W^{k,\infty}(R^N, R^N) \cap C^k(R^N, R^N) \text{ et } \eta \text{ est tangente au bord de } G(t_0) \} .$$

(1) On identifie $\mathcal{L}_c(R; W^{k,\sigma}(R^N, R^N))$ à $W^{k,\sigma}(R^N, R^N)$ et $\frac{\partial G}{\partial t}(t_0).1$ à $\frac{\partial G}{\partial t}(t_0)$.

REMARQUE 3.5.

On a obtenu une caractérisation exacte de la dérivée multivoque dans le cas où $E = \mathbb{R}$ et $\sigma = \bar{c}$. Dans les autres cas, on a seulement encadré

$$\frac{\partial G}{\partial e}(e_0) .$$

Démonstration de la partie i) du théorème 3.2.

Etant donné $\phi \in W^{1,1}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ on considère l'application définie sur $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ à valeurs dans \mathbb{R} par

$$J(D) = \int_D \phi(x) \, dx$$

On verra au théorème 4.2 que J est dérivable en tout point et que l'on a, si D_0 est borné et est localement graphe lipchitzien :

$$\frac{\partial J}{\partial D}(D_0) \cdot \theta = \int_{\partial D_0} \langle n, \theta \rangle \phi \, ds \quad \forall \theta \in W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$$

La proposition 3.3 de dérivation des applications composées montre que $J \circ G$ est dérivable au point e_0 et que

$$\frac{\partial (J \circ G)}{\partial e}(e_0) \cdot f = \int_{\partial G(e_0)} \langle n, \gamma \cdot f \rangle \phi \, ds \quad \forall f \in E, \\ \forall \gamma \in \frac{\partial G}{\partial e}(e_0) .$$

Etant donnés γ et $\tilde{\gamma}$ appartenant à $\frac{\partial G}{\partial e}(e_0)$, leur différence

$\eta = \gamma - \tilde{\gamma}$ vérifie donc

$$\int_{\partial G(e_0)} \langle n, \eta \cdot f \rangle \phi \, ds = 0 \quad \forall f \in E.$$

Cette égalité est valable pour tout $\phi \in W^{1,1}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$,

donc

$$\langle n, \eta \cdot f \rangle = 0 \quad \text{p.p. sur } \partial G(e_0) \quad \forall f \in E.$$

Ceci établit la partie i) du théorème 3.2. ■

Démonstration de la partie ii) du théorème 3.2.

L'application G étant dérivable de E à valeurs dans $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ au point e_0 et admettant pour dérivée γ , il existe d'après la définition 3.2 une fonction $\star G_{e_0}$ définie sur un voisinage de e_0 dans E à valeurs dans

$W^{k,\sigma}(R^N, R^N)$ telle que

$$(3.39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \star G_{e_0}(e_0) = 0 \\ G(e) = (I + \star G_{e_0}(e))(G(e_0)) \quad \forall e \\ \star G_{e_0} \text{ est dérivable au point } e_0 \end{array} \right.$$

et

$$(3.40) \quad \frac{\partial \star G_{e_0}}{\partial e}(e_0) = \gamma$$

Etant donné $\eta \in \mathcal{L}_c(E; W^{k+1,\infty}(R^N, R^N))$ tangente au bord de $G(e_0)$,

on considère la fonction $\star \hat{G}_{e_0}$ définie par

$$\star \hat{G}_{e_0}(e) = (I + \star G_{e_0}(e)) \circ e^{\eta \cdot (e - e_0)} - I ;$$

d'après le lemme 3.3. i) et le lemme 2.2. ii), $\star \hat{G}_{e_0}$ est définie sur un voisi-

nage de e_0 à valeurs dans $W^{k,\sigma}(R^N, R^N)$. Nous allons montrer que $\star \hat{G}_{e_0}$ vérifie (3.39) et

$$(3.41) \quad \frac{\partial \star \hat{G}_{e_0}}{\partial e}(e_0) = \gamma + \eta$$

ce qui implique $\gamma + \eta \in \frac{\partial G}{\partial e}(e_0)$, donc la partie ii) du théorème.

i) On a $\star \hat{G}_{e_0}(e_0) = 0$ puisque $e^{\eta \cdot 0} = I$

ii) L'ouvert $G(e_0)$ étant de classe C^1 et l'application η étant tangente au bord, on a d'après le lemme 3.2

$$e^{\eta \cdot (e - e_0)}(G(e_0)) = G(e_0)$$

et il résulte de (3.39) que

$$(I + \star \hat{G}_{e_0}(e_0))(G(e_0)) = ((I + \star G_{e_0}(e)) \circ e^{\eta \cdot (e - e_0)}) G(e_0) = G(e)$$

iii) Posons

$$X(e) = \star \hat{G}_{e_0}(e_0) - (\gamma + \eta) \cdot (e - e_0)$$

On a

$$\begin{aligned} X(e) &= (I + \star G_{e_0}(e)) \circ e^{\eta \cdot (e - e_0)} - I - (\gamma + \eta) \cdot (e - e_0) \\ &= e^{\eta \cdot (e - e_0)} - I - \eta \cdot (e - e_0) \\ &\quad + (\star G_{e_0}(e) - 0 - \gamma \cdot (e - e_0)) \circ e^{\eta \cdot (e - e_0)} \\ &\quad + (\gamma \cdot (e - e_0)) \circ e^{\eta \cdot (e - e_0)} - \gamma \cdot (e - e_0) \end{aligned}$$

La majoration (2.9)^{bis} et le lemme 2.2 v) (puisque $\gamma \in \mathcal{L}_c(E; W^{k+1}(R^N, R^N))$)

permettent d'écrire :

$$\begin{aligned} \|X(e)\|_k &\leq \|e^{\eta \cdot (e - e_0)} - I - \eta \cdot (e - e_0)\|_k \\ &\quad + \beta_k \|\star G_{e_0}(e) - 0 - \gamma \cdot (e - e_0)\|_k (1 + \|e^{\eta \cdot (e - e_0)} - I\|_k)^k \\ &\quad + c_k \|\gamma \cdot (e - e_0)\|_{k+1} \|e^{\eta \cdot (e - e_0)} - I\|_k (1 + \|e^{\eta \cdot (e - e_0)} - I\|_k)^k \end{aligned}$$

et le résultat de dérivation du lemme 3.3.i) joint à la dérivabilité de $\star G_{e_0}$ montrent que

$$\frac{\|X(e)\|_k}{\|e - e_0\|_E} \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \|e - e_0\|_E \rightarrow 0$$

ce qui montre que $\star \hat{G}_{e_0}$ est dérivable au point e_0 et vérifie (3.41). ■

Démonstration de la partie iii) du théorème 3.2.

L'application G étant dérivable au point e_0 et admettant pour dérivée γ , il existe une fonction $\star G_{e_0}$ de E à valeurs dans $W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ vérifiant (3.39) et (3.40).

Etant donné $\eta \in \mathcal{L}_c(E; W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N))$ telle que

(3.41)bis $\eta \cdot f = 0$ sur le bord de $G(e_0)$ pour tout $f \in E$,

on considère la fonction $\star \hat{G}_{e_0}$ définie par

$$\star \hat{G}_{e_0}(e) = \star G_{e_0}(e) + \eta \cdot (e - e_0)$$

Les propriétés (3.39) jointes au lemme 2.4.i) montrent que pour tout e assez proche de e_0 on a $I + \star G_{e_0}(e) \in \mathcal{O}^{k,\sigma}$ avec

$$\| (I + \star G_{e_0}(e))^{-1} - I \|_k \leq \varepsilon_k \| \star G_{e_0}(e) \|_k \leq 1.$$

et la majoration (2.9) bis donne alors

(3.41)ter
$$\left\{ \begin{aligned} & \| (\eta \cdot (e - e_0)) \circ (I + \star G_{e_0}(e))^{-1} \|_k < \\ & < \beta_k \|\eta\|_{\mathcal{L}_c(E; W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N))} \|e - e_0\|_E 2^k \end{aligned} \right.$$

Les propriétés (3.39) jointes au théorème 2.3.ii) montrent que les domaines $(I + \star G_{e_0}(e))(G(e_0))$ convergent vers $G(e_0)$ pour la distance de Hausdorff, quand e converge vers e_0 . Il existe donc une boule $B(x_0, \varepsilon)$ contenue dans $(I + \star G_{e_0}(e))(G(e_0))$ pour tout e assez proche de e_0 .

En choisissant $\|e - e_0\|_E$ assez petit, on peut donc rendre le second

membre (3.41) ter plus petit que ε ; de plus il résulte de (3.41)bis que $(\eta \cdot (e - e_0)) \circ (I + \star G_{e_0}(e))^{-1} = 0$ sur le bord de $(I + \star G_{e_0}(e))(G(e_0))$;

Le lemme 3.4 montre alors que

$$[I + (\eta \cdot (e - e_0)) \cdot (I + \star G_{e_0}(e))^{-1}] (I + \star G_{e_0}(e))(G(e_0)) = (I + \star G_{e_0}(e))(G(e_0))$$

c'est à dire

$$(I + \star \hat{G}_{e_0}(e))(G(e_0)) = (I + \star G_{e_0}(e))(G(e_0)) = G(e) \quad \text{d'après (3.39) .}$$

Ceci montre que la fonction $\star \hat{G}_{e_0}$ vérifie les 3 propriétés de (3.39)

(les 2 autres propriétés sont triviales) avec

$$\frac{\partial \star \hat{G}_{e_0}}{\partial e}(e_0) = \gamma + \eta$$

ce qui implique $\gamma + \eta \in \frac{\partial G}{\partial e}(e_0)$, donc la partie iii) du théorème . ■

Démonstration de la partie ii) du théorème 3.3.

L'application G étant dérivable au point e_0 et admettant comme dérivée γ , il existe une fonction $\star G_{t_0}$ de \mathbb{R} à valeurs dans $W^{k,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ vérifiant (3.39) et (3.40).

Etant donné $\eta \in W^{k,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \cap C^k(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ tangent au bord de $G(t_0)$, on considère la fonction $\star \hat{G}_{t_0}$ définie par

$$\star \hat{G}_{t_0}(t) = (I + \star G_{t_0}(t)) \cdot e^{(t-t_0)\phi \eta} - I + (t - t_0)(1 - \phi) \eta$$

où ϕ est une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ égale à 1 sur $G(t_0)$. Le champ $\phi \eta$ est à support compact et appartient à $W^{k,\bar{c}}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, et la fonction $\star \hat{G}_{t_0}$ est définie sur un voisinage de t_0 à valeurs dans $W^{k,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ (Lemmes 3.3. ii) et 2.2. ii)).

Nous allons montrer que $\star \hat{G}_{t_0}$ vérifie (3.39) et

$$(3.42) \quad \frac{\partial \star \hat{G}_{t_0}}{\partial t}(t_0) = \gamma + \eta .$$

ce qui implique $\gamma + \eta \in \frac{\partial G}{\partial t}(t_0)$, donc la partie ii) du théorème.

i) On a $\star \hat{G}_{t_0}(t_0) = 0$

ii) La fonction $1 - \phi$ est nulle sur $G(t_0)$ de sorte que

$$(I + \star \hat{G}_{t_0}(t))(G(t_0)) = ((I + \star \hat{G}_{t_0}(t)) \circ e^{(t-t_0)\phi \eta})(G(t_0))$$

et ce terme est égal à $G(t)$. En effet le champ η étant tangent au bord de $G(t_0)$, le champ $\phi \eta$ l'est également, et le lemme 3.2 montre que

$$(e^{(t-t_0)\phi \eta})(G(t_0)) = G(t_0)$$

iii) Posons

$$X(t) = \star \hat{G}_{t_0}(t) - \star \hat{G}_{t_0}(t_0) - (t - t_0)(\gamma + \eta)$$

Soit ψ une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, égale à 1 sur le support de ϕ .

On a :

$$\begin{aligned} X(t) &= e^{(t-t_0)\phi \eta} - I - (t-t_0)\phi \eta \\ &+ (\star \hat{G}_{t_0}(t) - 0 - (t-t_0)\gamma) \circ e^{(t-t_0)\phi \eta} \\ &+ (t-t_0)[(\psi \gamma) \circ e^{(t-t_0)\phi \eta} - \psi \gamma] \\ &+ (t-t_0)[((1-\psi)\gamma) \circ e^{(t-t_0)\phi \eta} - (1-\psi)\gamma] \end{aligned}$$

Le dernier terme est nul, en effet :

- d'une part si $\phi(x) = 0$, l'équation différentielle (3.19) montre que

$$e^{(t-t_0)\phi \eta}(x) = x.$$

- d'autre part si x appartient au support de ϕ , $(1 - \psi)(x) = 0$; $e^{(t-t_0)\phi}$ est une bijection de \mathbb{R}^N égale à l'identité sur $\mathbb{R}^N - \text{Supp } \phi$, comme on vient de le voir; elle conserve donc $\text{supp } \phi$ et on a $(1 - \psi) \circ e^{(t-t_0)\phi}(x) = 0$.

Utilisant la majoration (2.9 bis) pour le 2ème terme, puis le lemme 3.2. et le lemme 2.2. iii) (puisque $\psi \gamma \in W^{k, \bar{C}}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$), on montre que :

$$\frac{\|X(t)\|_k}{|t - t_0|} \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad |t - t_0| \rightarrow 0$$

ce qui montre que $\hat{G}_{t_0}^*$ est dérivable au point t_0 et vérifie (3.42). ■

Démonstration de la partie i) du théorème 3.3.

Une démonstration analogue à celle de la partie ii) montre que si $\gamma \in \frac{\partial G}{\partial t}(t_0)$ on a

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t_0) \supset \{\gamma + \eta \mid \eta \in W^{k, \bar{C}}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \text{ et } \eta \text{ est tangent au bord de } G(t_0)\}.$$

L'inclusion inverse résulte du théorème 3.2.i). ■

3.4. CONDITIONS NECESSAIRES D'OPTIMALITE.

Les notions de dérivation introduites au paragraphe 3.1. vont nous permettre de donner des conditions nécessaires du premier ordre pour qu'une fonction réelle définie sur un espace de domaines réalise son minimum sur une famille \mathcal{D}_{ad} . On commencera par une condition simple, puis on la généralisera en introduisant l'espace tangent à \mathcal{D}_{ad} .

3.4.1. Conditions nécessaires d'optimalité élémentaires.

PROPOSITION 3.8.

Soient J une fonction réelle définie sur $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$, où $k > 1$ et $\sigma = +\infty$ ou \bar{c} , et \mathcal{D}_{ad} un sous ensemble de $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$.

Si un domaine D_0 réalise le minimum de J sur \mathcal{D}_{ad} , i.e. si

$$(3.43) \quad D_0 \in \mathcal{D}_{ad} \quad \text{et} \quad J(D_0) \leq J(D) \quad \forall D \in \mathcal{D}_{ad}$$

et si J est dérivable en D_0 , alors

$$(3.44) \quad \frac{\partial J}{\partial D}(D_0) \cdot \theta \geq 0 \quad \forall \theta \in W^{k,\sigma}(R^N, R^N) \text{ tel que } (I + h\theta)(D_0) \in \mathcal{D}_{ad}$$

pour tout h assez petit. ■

Un tel résultat est classique en théorie du contrôle, il se démontre en notant que $J((I + h\theta)(D_0)) - J(D_0) \geq 0$, en divisant par h et en passant à la limite pour $h \rightarrow 0$.

Mais pour de nombreuses familles $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$, il n'existe pas, ou "peu" d'éléments θ tels que D étant donné, $(I + h\theta)(D)$ appartienne à \mathcal{D} pour tout h assez petit. C'est par exemple le cas si

$$\mathcal{D} = \{D \mid D \in \mathcal{D}_Q^{k,\sigma}, \text{Vol}(D) = 1\}$$

ou encore si \mathcal{D} est une famille de boules de R^N dont le centre décrit une courbe ou une surface de R^N . C'est pourquoi on introduit l'espace tangent à \mathcal{D} en D.

3.4.2. Espace tangent à une famille de domaines.

On notera de façon générale $ET(A, \mathcal{A}, a)$ l'espace tangent à une partie \mathcal{A} d'un espace affine normé A au point a . C'est un cône de sommet 0 de l'espace vectoriel sous jacent à A .

De façon analogue, on définit l'espace tangent dans $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ à une famille de domaines \mathcal{D} en faisant jouer, à nouveau, à $W^{k,\sigma}(R^N, R^N)$ le rôle d'espace vectoriel sous jacent à $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$.

DEFINITION 3.3.

Soit $k \geq 1$ et $\sigma = \infty$ ou \bar{c} .

Etant donnés une famille de domaines $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ et $D \in \mathcal{D}$, on appelle espace tangent à \mathcal{D} en D le sous ensemble, noté $ET(\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}, \mathcal{D}, D)$, de $W^{k,\sigma}(R^N, R^N)$ des champs θ tels qu'il existe une application $g : [0, 1] \rightarrow \mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$

qui vérifie

$$\left\{ \begin{array}{l} g(0) = D \\ g(t) \in \mathcal{D} \quad \forall t, \quad 0 \leq t \leq 1 \\ g \text{ dérivable de } R \text{ dans } \mathcal{D}_Q^{k,\sigma} \text{ au point } 0 \text{ et } (1) \\ \theta \in \frac{\partial g}{\partial t}(0) . \end{array} \right.$$

REMARQUE 3.6.

La condition nécessaire et suffisante de dérivabilité donnée par

(3.6) montre que

$$ET(\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}, \mathcal{D}, D) = \{ \theta \in W^{k,\sigma}(R^N, R^N) \mid \exists s, s : [0, 1] \rightarrow \mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$$

$$s(0) = I$$

$$s(t)(D) \in \mathcal{D} \quad \forall t \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$s \text{ dérivable en } 0 \quad (\text{sens usuel}).$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial s}{\partial t}(0) = \theta \end{array} \right\}$$

(1) On identifie $\mathcal{L}_c(R; W^{k,\sigma}(R^N, R^N))$ à $W^{k,\sigma}(R^N, R^N)$ et $\frac{\partial s}{\partial t}(0) \cdot 1$ à $\frac{\partial s}{\partial t}(0)$

ce qui peut encore s'écrire :

$$ET(\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}, \mathcal{D}, D) = ET(\mathcal{V}^{k,\sigma}, \mathcal{C}, I)$$

où $\mathcal{C} = \{T | T \in \mathcal{C}^{k,\sigma} \text{ et } T(D) \in \mathcal{D}\}$.

REMARQUE 3.7.

1) Si D est un ouvert borné, de classe C^1 , le théorème 3.3 montre que

i) dans le cas $\sigma = \bar{c}$, si $\theta \in ET(\mathcal{D}_Q^{k,\bar{c}}, \mathcal{D}, D)$, alors

$$\{\theta + \eta | \eta \in W^{k,\bar{c}}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \langle n, \eta \rangle = 0 \text{ sur } \partial D\} \subset ET(\mathcal{D}_Q^{k,\bar{c}}, \mathcal{D}, D)$$

ii) dans le cas $\sigma = \infty$ si $\theta \in ET(\mathcal{D}_Q^{k,\infty}, \mathcal{D}, D) \cap C^k(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, alors

$$\{\theta + \eta | \eta \in W^{k,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \cap C^k(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N), \langle n, \eta \rangle = 0 \text{ sur } \partial D\} \subset ET(\mathcal{D}_Q^{k,\infty}, \mathcal{D}, D)$$

2) Si D est un ouvert connexe de \mathbb{R}^N , le théorème 3.2 iii) montre que si

$\theta \in ET(\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}, \mathcal{D}, D)$ alors

$$\{\theta + \eta | \eta \in W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N), \eta = 0 \text{ sur } \partial D\} \subset ET(\mathcal{D}_0^{k,\sigma}, \mathcal{D}, D).$$

Si \mathcal{D} est ouvert dans $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$, on a pour tout $D \in \mathcal{D}$,

$$ET(\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}, \mathcal{D}, D) = W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N). \text{ On trouvera au paragraphe 3.5 quelques}$$

exemples d'études d'espaces tangents.

3.4.3. Conditions nécessaires d'optimalité générales.

THEOREME 3.4.

Soient J une fonction réelle définie sur $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$, où

$k \geq 1$, $\sigma = +\infty$ ou \bar{c} , et \mathcal{D}_{ad} un sous ensemble de $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$.

Si un domaine D_0 réalise le minimum de J sur \mathcal{D}_{ad} , et si J est

dérivable en D_0 , alors

$$(3.45) \quad \frac{\partial J}{\partial D}(D_0) \cdot \theta \geq 0 \quad \forall \theta \in ET(\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}, \mathcal{D}_{ad}, D_0)$$

Démonstration du théorème 3.4.

Soit $\theta \in \text{ET}(\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}, \mathcal{D}_{ad}, D_0)$. Il existe une application $g : [0,1] \rightarrow \mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ dérivable en zéro, qui admet θ comme dérivée, et la proposition 3.3 montre que l'application $J \circ g$ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est dérivable en zéro et a pour dérivée

$$\frac{\partial(J \circ g)}{\partial t}(0) \cdot 1 = \frac{\partial J}{\partial D}(g(0)) \cdot \theta = \frac{\partial J}{\partial D}(D_0) \cdot \theta$$

dérivée qui est positive puisque $J(g(t)) - J(g(0)) \geq 0$ pour $t \in [0,1]$. ■

REMARQUE 3.8.

On a vu au paragraphe 3.3.2 que si D_0 est un ouvert borné de classe C^1 , la dérivée dans la direction θ d'une fonction J définie sur $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ à valeurs dans \mathbb{R} ne dépend de θ (presque) que par l'intermédiaire de la trace normale $\langle n, \theta \rangle$ sur ∂D_0 . On sera donc amené, pour exprimer les conditions nécessaires d'optimalité (3.45), à considérer l'ensemble des "accroissements normaux" au domaine D_0 , i.e. :

$$\{ \varphi \mid \varphi = \langle n, \theta \rangle|_{\partial D_0}, \theta \in \text{ET}(\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}, \mathcal{D}_{ad}, D_0) \} .$$

3.5. ETUDE DE QUELQUES ESPACES TANGENTS.

Les conditions nécessaires d'optimalité données au théorème 3.4. font intervenir l'espace tangent à la famille \mathcal{D} dans laquelle on minimise. C'est pourquoi nous allons étudier dans ce paragraphe les espaces tangents à quelques familles de domaines. Dans certains cas nous les caractériserons, dans d'autres nous en expliciterons une partie. Nous étudierons successivement les familles suivantes :

- 3.5.1. Famille de domaines définie par une équation. Applications aux domaines de volume donné ou de surface donnée.
- 3.5.2. Famille de domaines définie par une inéquation.
- 3.5.3. Famille de domaines paramétrée. Résultats abstraits.
- 3.5.4. Famille de domaines paramétrée. Applications à la localisation d'un objet de forme donnée, et aux domaines définis par le graphe d'une fonction.

3.5.1. Famille de domaines définie par une équation. Applications aux domaines de volume donné ou de surface donnée.

THEOREME 3.5.

Etant donnée une application F définie sur $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$, où $k \geq 1$ et $\sigma = +\infty$ ou \bar{c} , à valeurs dans \mathbb{R} , on considère la famille de domaines

$$\mathcal{D} = \{ D \in \mathcal{D}_Q^{k,\sigma} \mid F(D) = 0 \}$$

Soit $D_0 \in \mathcal{D}$; on suppose que

$$(3.46) \quad \left\{ \begin{array}{l} F \text{ est continue sur un voisinage de } D_0 \text{ et est dérivable au point } D_0, \\ \text{avec } \frac{\partial F}{\partial D}(D_0) \neq 0 . \end{array} \right.$$

Alors l'espace tangent à \mathcal{D} en D_0 est

$$ET(\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}, \mathcal{D}, D_0) = \{ \theta \mid \theta \in W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N), \frac{\partial F}{\partial D}(D_0) \cdot \theta = 0 \} . \blacksquare$$

Avant de démontrer ce théorème, donnons-en deux applications.

i) Application aux domaines de volume donné.

Soient Q un ouvert de volume fini, $k \geq 1$, $\sigma = \infty$ ou \bar{c} et $v \in \mathbb{R}$, $v > 0$. On considère

$$\mathcal{D} = \{ D \in \mathcal{D}_Q^{k,\sigma} \mid \text{Vol } D = v \}$$

On applique le théorème 3.5 avec

$$F(D) = \text{Vol } D = \int_D 1 \, dx$$

Le théorème 4.2 montre que F est dérivable (donc continue d'après la proposition 3.1) de $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ dans \mathbb{R} en tout point $D \in \mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$, et que

$$\frac{\partial F}{\partial D}(D) \cdot \theta = \int_D \text{div } \theta \, dx \quad \forall \theta \in W^{k,\sigma}(R^N, R^N)$$

On en déduit que l'hypothèse (3.46) est vérifiée pour tout $D_0 \in \mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ et

que l'on a :

$$(3.47) \quad \text{ET}(\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}, \mathcal{D}, D_0) = \{ \theta \in W^{k,\sigma}(R^N, R^N) \mid \int_{D_0} \text{div } \theta \, dx = 0 \}.$$

Ce résultat ne suppose aucune hypothèse de régularité sur les frontières de Q et D_0 . Si D_0 est borné et est localement graphe lipschitzien, la formule de Stokes montre que

$$(3.48) \quad \text{ET}(\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}, \mathcal{D}, D_0) = \{ \theta \in W^{k,\sigma}(R^N, R^N) \mid \int_{\partial D_0} \langle n, \theta \rangle \, ds = 0 \}$$

où n est la normale extérieure à ∂D_0 . ■

ii) Application aux domaines de surface donnée.

Soient Q un domaine de R^N borné, localement graphe lipschitzien, k et σ tels que $k = 1$, $\sigma = \bar{c}$, ou $k > 1$, $\sigma = +\infty$ ou \bar{c} , et $s \in \mathbb{R}$ $s > 0$.

On considère

$$\mathcal{D} = \{ D \in \mathcal{D}_Q^{k,\sigma} \mid \text{Surface}(\partial D) = s \}$$

On applique le théorème 3.5 avec

$$F(D) = \text{Surface}(\partial D) = \int_{\partial D} 1 \, ds$$

Comme dans l'exemple précédent on montre, en utilisant le théorème 4.4, que l'hypothèse (3.46) est vérifiée en tout point $D_0 \in \mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ et que l'on a

$$(3.49) \quad \begin{cases} \text{ET}(\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}, \mathcal{D}, D_0) = \\ = \{ \theta \in W^{k,\sigma}(R^N, R^N) \mid \int_{\partial D_0} (\text{div} \theta - \langle [\theta'] n, n \rangle) \, ds = 0 \} \end{cases}$$

où n est la normale extérieure à ∂D_0 .

Ce résultat est valable si Q (et donc D_0) est borné, localement graphe lipschitzien. Si D_0 est de plus de classe $W^{2,\infty}$, le lemme 4.9 montre que

$$(3.50) \quad \text{ET}(\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}, \mathcal{D}, D_0) = \{ \theta \in W^{k,\sigma}(R^N, R^N) \mid \int_{\partial D_0} \langle n, \theta \rangle H \, ds = 0 \}$$

où H est la courbure moyenne de ∂D_0 (cf. paragraphe 4.3) ■

DEMONSTRATION DU THEOREME 3.5.

i) Soit $\theta \in \text{ET}(\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}, \mathcal{D}, D_0)$. Par définition il existe une fonction $g : [0,1] \rightarrow \mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ dérivable en 0 avec $\frac{\partial g}{\partial t}(0) \ni \theta$ et $g(t) \in \mathcal{D}, \forall t \in [0,1]$.

Cela entraîne $(F \circ g)(t) = 0, \forall t \in [0,1]$, et puisque F est dérivable en D_0 , le résultat de dérivation des applications composées (proposition 3.3.) montre que

$$0 = \frac{\partial(F \circ g)}{\partial t}(0) \cdot 1 = \frac{\partial F}{\partial D}(D_0) \cdot \theta$$

On a donc

$$\text{ET}(\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}, \mathcal{D}, D_0) \subset \{ \theta \in W^{k,\sigma}(R^N, R^N) \mid \frac{\partial F}{\partial D}(D_0) \cdot \theta = 0 \}.$$

ii) Réciproquement, soit $\theta \in W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ tel que $\frac{\partial F}{\partial D}(D_0) \cdot \theta = 0$.

On se donne $\alpha \in W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ tel que $\frac{\partial F}{\partial D}(D_0) \cdot \alpha > 0$.

Admettons un instant qu'il existe une application λ définie sur $[0, t_0]$ ($t_0 > 0$), à valeurs dans \mathbb{R} telle que ⁽¹⁾

$$(3.51) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda(0) = 0 \\ (I + t\theta + \lambda(t)\alpha) \in \mathcal{C}^{k,\sigma} \text{ et } F((I + t\theta + \lambda(t)\alpha)(D_0)) = 0 \quad \forall t \in [0, t_0] \\ \frac{\lambda(t)}{t} \rightarrow 0 \quad \text{si } t \rightarrow 0 \end{array} \right.$$

Il en résulte alors que l'application $g : [0, t_0] \rightarrow \mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$

définie par

$$g(t) = (I + t\theta + \lambda(t)\alpha)(D_0)$$

$$\text{vérifie} \quad \left\{ \begin{array}{l} g(0) = D_0 \\ g(t) \in \mathcal{D} \quad \forall t \in [0, t_0] \\ g \text{ dérivable de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathcal{D}_Q^{k,\sigma} \text{ en } 0 \\ \theta \in \frac{\partial g}{\partial t}(0) . \end{array} \right.$$

d'où l'on déduit que $\theta \in ET(\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}, \mathcal{D}, D_0)$.

(1) Ceci est un résultat d'existence d'une fonction implicite $t \rightarrow \lambda(t)$ pour l'équation $F((I + t\theta + \lambda\alpha)(D_0)) = 0$. Les hypothèses et les résultats ne coïncident pas avec le théorème classique d'existence de la fonction implicite. On ne se pose pas la question de l'unicité.

Montrons maintenant qu'il existe ξ vérifiant (3.51). La fonction F étant dérivable en zéro, on a

$$(3.52) \quad \begin{cases} \forall \xi \in W^{k,\sigma}(R^N, R^N) \\ F((I + \xi)(D_0)) = F(D_0) + \frac{\partial F}{\partial D}(D_0) \cdot \xi + r(\xi) \\ \text{où } \frac{|r(\xi)|}{\|\xi\|_k} \rightarrow 0 \quad \text{si } \|\xi\|_k \rightarrow 0 \end{cases}$$

Il existe donc $\eta > 0$ tel que

$$(3.53) \quad \|\xi\|_k < \eta \Rightarrow |r(\xi)| < \|\xi\|_k \cdot \frac{\frac{\partial F}{\partial D}(D_0) \cdot \alpha}{\|\theta\|_k + \|\alpha\|_k}$$

D'autre part F étant continue au voisinage de D_0 , il existe une $d_{k,\sigma}$ boule de centre 0 et de rayon r , sur laquelle F est continue.

Choisissons $t_0 > 0$ tel que

$$(3.54) \quad t_0 < \frac{1}{\|\theta\|_k + \|\alpha\|_k} \cdot \text{Inf} \left\{ \eta, \frac{r}{1 + \varepsilon_k}, \frac{1}{2\sqrt{kN^{k+3}}} \right\}$$

où ε_k est une constante définie au lemme 2.4. i).

Alors

$$\forall t \in [0, t_0] \quad , \quad \forall \lambda \in [-t, +t]$$

$$\begin{aligned} \|\tau\theta + \lambda\alpha\|_k &\leq t\|\theta\|_k + |\lambda| \cdot \|\alpha\|_k \leq t_0(\|\theta\|_k + \|\alpha\|_k) \\ &< \frac{1}{2\sqrt{kN^{k+3}}} \end{aligned}$$

et le lemme 2.4. i) montre que $I + \tau\theta + \lambda\alpha \in \mathcal{C}^{k,\sigma}$. On peut donc définir pour $0 \leq t \leq t_0$ la fonction $\phi_t : [-t, +t] \rightarrow R$ par :

$$\phi_t(\lambda) = F((I + \tau\theta + \lambda\alpha)(D_0)) \quad , \quad |\lambda| \leq t.$$

La fonction ϕ_t est continue sur $[-t, +t]$. En effet $\lambda \rightarrow I + \tau\theta + \lambda\alpha$ est continue de $[-t, +t]$ à valeurs dans $\mathcal{C}^{k,\sigma}$ muni de la topologie induite par $\mathcal{V}^{-k,\sigma}$, donc muni de la topologie définie par δ_k (puisque ces deux

topologies coïncident : cf. point c) de la démonstration du théorème 2.1.); l'application $T \rightarrow T(D_0)$ est continue sur $\mathcal{C}^{k,\sigma}$ muni de δ_k à valeurs dans

$\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ (théorème 2.2. i)); enfin F est continue sur la boule de centre D_0

et de rayon r et, d'après le lemme 2.4 et (3.54),

$$\forall t \in [0, t_0] , \quad \forall \lambda \in [-t, +t] , \quad \text{on a}$$

$$d_{k,\sigma}((I + t\theta + \lambda\alpha)(D_0)) \leq \|t\theta + \lambda\alpha\|_k (1 + \varepsilon_k)$$

$$\leq t_0 (\|\theta\|_k + \|\alpha\|_k) (1 + \varepsilon_k) < r$$

D'autre part, puisque $F(D_0) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial D}(D_0) \cdot \theta = 0$, φ_t peut s'écrire

d'après (3.52)

$$(3.55) \quad \phi_t(\lambda) = \lambda \frac{\partial F}{\partial D}(D_0) \cdot \alpha + r(t\theta + \lambda\alpha).$$

Or en raison du choix de t_0

$\forall t \in [0, t_0]$, on a

$$\|t\theta + t\alpha\|_k \leq t(\|\theta\|_k + \|\alpha\|_k) < r$$

$$\|t\theta - t\alpha\|_k \leq t(\|\theta\|_k + \|\alpha\|_k) < r$$

de sorte que d'après (3.53)

$$|r(t\theta + t\alpha)| < \|t\theta + t\alpha\|_k \frac{\frac{\partial F}{\partial D}(D_0) \cdot \alpha}{\|\theta\|_k + \|\alpha\|_k} \leq t \frac{\partial F}{\partial D}(D_0) \cdot \alpha$$

$$|r(t\theta - t\alpha)| < \|t\theta - t\alpha\|_k \frac{\frac{\partial F}{\partial D}(D_0) \cdot \alpha}{\|\theta\|_k + \|\alpha\|_k} \leq t \frac{\partial F}{\partial D}(D_0) \cdot \alpha$$

et donc

$$(3.56) \quad \phi_t(t) > 0 ; \quad \phi_t(-t) < 0$$

La fonction ϕ_t étant continue sur $[-t, +t]$, et vérifiant (3.56),

il existe donc $\lambda(t)$ tel que $-t < \lambda(t) < t$ et $\phi_{\lambda}(l(t)) = 0$,

c'est à dire

$$F((I + t\theta + \lambda(t)\alpha)(D_0)) = 0 \quad \forall t \in [0, t_0] .$$

On a vu en cours de démonstration que

$$I + t\theta + \lambda(t)\alpha \in \mathcal{C}^{k,\sigma} \quad \forall t \in [0, t_0] .$$

D'autre part $|\lambda(t)| < t$ entraîne $\lambda(0) = 0$, et aussi ,

d'après (3.35)

$$\frac{|r(t\theta + \lambda(t)\alpha)|}{\|t\theta + \lambda(t)\alpha\|_k} = |\lambda(t)| \frac{\frac{\partial F}{\partial D}(D_0) \cdot \alpha}{\|t\theta + \lambda(t)\alpha\|_k} \geq \frac{|\lambda(t)|}{t} \frac{\frac{\partial F}{\partial D}(D_0) \cdot \alpha}{\|\theta\|_k + \|\alpha\|_k}$$

Or le premier membre tend vers zéro avec t (cf. (3.52)) et donc

$$\frac{|\lambda(t)|}{t} \rightarrow 0 \text{ si } t \rightarrow 0.$$

Ceci montre l'existence d'une fonction λ vérifiant (3.51) et

achève donc la démonstration du théorème 3.5. ■

3.5.2. Famille de domaines définie par une inéquation.

On va démontrer un résultat analogue au théorème 3.5 et qui peut, de même, s'appliquer aux familles de domaines de volume borné ou de surface bornée.

THEOREME 3.6.

Etant donnée une application F définie sur $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$, où $k > 1$ et $\sigma = +\infty$ ou \bar{c} , à valeurs dans \mathbb{R} , on considère la famille de domaines

$$\mathcal{D} = \{ D \in \mathcal{D}_Q^{k,\sigma} \mid F(D) < 0 \}$$

i) Soit D_0 tel que $F(D_0) < 0$; on suppose F continue en D_0 . Alors

l'espace tangent à \mathcal{D} en D_0 est l'espace tout entier, i.e.

$$ET(\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}, \mathcal{D}, D_0) = W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N).$$

ii) Soit D_0 tel que $F(D_0) = 0$; on suppose que

$$\left\{ \begin{array}{l} F \text{ est continue sur un voisinage de } D_0 \text{ et est dérivable au point } D_0 \\ \text{avec } \frac{\partial F}{\partial D}(D_0) \neq 0 \end{array} \right.$$

Alors l'espace tangent à \mathcal{D} en D_0 est :

$$ET(\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}, \mathcal{D}, D_0) = \{ \theta \in W^{k,\sigma}(R^N, R^N) \mid \frac{\partial F}{\partial D}(D_0) \cdot \theta \leq 0 \} \quad \blacksquare$$

Démonstration de la partie i) du théorème 3.6.

Soit D_0 tel que $F(D_0) < 0$. Etant donné $\theta \in W^{k,\sigma}(R^N, R^N)$, on définit une application de $[0, t_0]$, $t_0 > 0$ assez petit, dans $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ par: $g(t) = (I + t\theta)(D_0)$. L'application g est dérivable en zéro avec $\dot{g} \in \frac{\partial g}{\partial t}(0)$ et vérifie $g(0) = D_0$. Puisque F est continue en D_0 , on a $F(g(t)) < 0$ si t est assez petit, donc $g(t) \in \mathcal{D}$. La définition 3.3 montre que θ appartient à $ET(\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}, \mathcal{D}, D_0)$. ■

Démonstration de la partie ii) du théorème 3.6.

Soit D_0 tel que $F(D_0) = 0$.

i) Etant donné $\theta \in W^{k,\sigma}(R^N, R^N)$ tel que $\frac{\partial F}{\partial D}(D_0) \cdot \theta < 0$, on définit une application g de $[0, t_0]$, $t_0 > 0$ assez petit, dans $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ par $g(t) = (I + t\theta)(D_0)$.

La fonction F étant dérivable en D_0 on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{t} F(g(t)) = \frac{\partial F}{\partial D}(D_0) \cdot \theta + \frac{r(t\theta)}{t}, \quad \forall t \in]0, t_0[\\ \text{avec } \frac{|r(t\theta)|}{t} \rightarrow 0 \quad \text{si } t \rightarrow 0. \end{array} \right.$$

d'où $F(g(t)) < 0$, $\forall t \in]0, t_0[$, t_0 assez petit, et donc $g(t) \in \mathcal{D}$.

D'autre part $g(0) = D_0$ et g est dérivable en zéro avec $\theta \in \frac{\partial g}{\partial t}(0)$. D'après la définition 3.3, θ appartient donc à $ET(\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}, \mathcal{D}, D_0)$

ii) Etant donné $\theta \in W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ tel que $\frac{\partial F}{\partial D}(D_0) \cdot \theta = 0$ la partie

ii) de la démonstration du théorème 3.5 montre que θ appartient à $ET(\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}, \mathcal{D}, D_0)$.

iii) Réciproquement, soit θ appartenant à $ET(\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}, \mathcal{D}, D_0)$. Par définition, il existe $g : [0,1] \rightarrow \mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ telle que $g(0) = D_0$, g dérivable en zéro avec $\theta \in \frac{\partial g}{\partial t}(0)$ et $g(t) \in \mathcal{D}$. Cela entraîne $F(g(0)) = 0$ et $F(g(t)) \leq 0$, $\forall t \in [0,1]$. La fonction F étant dérivable en D_0 le résultat de dérivation des applications composées de la proposition 3.3 montre que

$$0 \geq \frac{\partial (F \circ g)}{\partial t}(0) \cdot 1 = \frac{\partial F}{\partial D}(D_0) \cdot \theta$$

On a donc

$$ET(\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}, \mathcal{D}, D_0) \subset \{ \theta \in W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \mid \frac{\partial F}{\partial D}(D_0) \cdot \theta \leq 0 \} . \quad \blacksquare$$

3.5.3. Famille de domaines paramétrée. Résultats abstraits.

Nous allons étudier ici l'espace tangent à une famille de domaines

$\mathcal{D} = \{ G(e) \mid e \in \mathcal{E} \}$ définie par l'intermédiaire d'une fonction

$G : E \rightarrow \mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$. Nous considérerons d'abord le cas d'un paramétrage G abstrait,

puis le cas où G fait intervenir les homéomorphismes qui définissent les

domaines D . Deux exemples d'applications seront donnés au paragraphe 3.5.4.

PROPOSITION 3.9.

Etant données une application G définie sur un ouvert \mathcal{O} d'un espace de Banach E , à valeurs dans $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$, $k \geq 1$, $\sigma = \infty$ ou \bar{c} , et \mathcal{E} une partie de E , $\mathcal{E} \subset \mathcal{O}$, on considère la famille de domaines

$$\mathcal{D} = G(\mathcal{E}) = \{ G(e) \mid e \in \mathcal{E} \}$$

On suppose G dérivable en tout point de \mathcal{E} .

i) Soit $D_0 \in \mathcal{D}$. Pour tout $e_0 \in \mathcal{E}$ tel que $G(e_0) = D_0$ et pour tout $\gamma \in \frac{\partial G}{\partial e}(e_0)$ on a l'inclusion

$$(3.57) \quad \text{ET}(\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}, \mathcal{D}, D_0) \supset \{ \theta \mid \theta = \gamma \varepsilon, \varepsilon \in \text{ET}(E, \mathcal{E}, e_0) \}$$

ii) On fait en outre l'hypothèse suivante

$$(3.58) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Il existe une fonction } H, \text{ définie sur } \mathcal{D}_Q^{k,\sigma}, \text{ à valeurs dans } E, \\ \text{dérivable en tout point de } \mathcal{D}, \text{ et telle que} \\ H \circ G(e) = e, \quad \forall e \in \mathcal{E}. \end{array} \right.$$

Soit $D_0 \in \mathcal{D}$, borné, localement graphe lipschitzien, et n sa normale extérieure. On pose $e_0 = H(D_0)$. Etant donné $\gamma \in \frac{\partial G}{\partial e}(e_0)$, on a l'inclusion

$$(3.59) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ET}(\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}, \mathcal{D}, D_0) \subset \\ \subset \{ \theta \in W^{k,\sigma}(R^N, R^N) \mid \langle n, \theta \rangle = \langle n, \gamma \cdot \varepsilon \rangle \text{ sur } \partial D_0, \varepsilon \in \text{ET}(E, \mathcal{E}, e_0) \}. \end{array} \right.$$

iii) On suppose que $\sigma = \bar{c}$, et on fait l'hypothèse (3.58).

Soit $D_0 \in \mathcal{D}$, ouvert borné de classe C^1 , et n sa normale extérieure. On pose $e_0 = H(D_0)$. Etant donné $\gamma \in \frac{\partial G}{\partial e}(e_0)$, on a l'égalité :

$$(3.60) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ET}(\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}, \mathcal{D}, D_0) = \\ = \{ \theta \in W^{k,\bar{c}}(R^N, R^N) \mid \langle n, \theta \rangle = \langle n, \gamma \cdot \varepsilon \rangle \text{ sur } \partial D_0, \varepsilon \in \text{ET}(E, \mathcal{E}, e_0) \}. \end{array} \right.$$

■

Rappelons que $\frac{\partial G}{\partial e}(e_0)$ est inclus dans $L_c(E; W^{k,\sigma}(R^N, R^N))$, et que $ET(E, \mathcal{E}, e_0)$ désigne l'espace tangent à \mathcal{E} en e_0 , défini au sens usuel par :

$$ET(E, \mathcal{E}, e_0) = \left\{ \varepsilon \in E \mid \exists s : [0, 1] \rightarrow E \right. \\ \left. \begin{aligned} s(0) &= e_0 \\ s(t) &\in \mathcal{E} \quad \forall t \in [0, 1] \\ s \text{ dérivable en zéro (sens usuel)} \\ \frac{\partial s}{\partial t}(0) &= \varepsilon \end{aligned} \right\}.$$

Démonstration de la partie i) de la proposition 3.9.

Soit $e_0 \in \mathcal{E}$ tel que $G(e_0) = D_0$, et soit $\varepsilon \in ET(E, \mathcal{E}, e_0)$.

Etant donné une application s définissant ε , on considère la fonction

$G \circ s : [0, 1] \rightarrow \mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$. Elle vérifie $(G \circ s)(0) = G(e_0) = D_0$,

$(G \circ s)(t) \in G(\mathcal{E}) = \mathcal{D}$, et la proposition 3.5 montre que $G \circ s$ est dérivable en zéro avec $\gamma \cdot \varepsilon \in \frac{\partial(G \circ s)}{\partial t}(0) \cdot 1$, $\forall \gamma \in \frac{\partial G}{\partial e}(e_0)$.

D'après la définition 3.3, $\theta = \gamma \cdot \varepsilon$ appartient donc à $ET(\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}, \mathcal{D}, D_0)$, ce qui démontre l'inclusion (3.57). ■

Démonstration de la partie ii) de la proposition 3.9.

Soit $\theta \in ET(\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}, \mathcal{D}, D_0)$. Alors il existe (définition 3.3) une application $g : [0, 1] \rightarrow \mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ telle que $g(0) = D_0$, $g(t) \in \mathcal{D}$ $\forall t \in [0, 1]$, g dérivable de \mathbb{R} dans $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ au point 0, et $\frac{\partial g}{\partial t}(0) \ni \theta$.

Considérons la fonction $G \circ H \circ g : [0, 1] \rightarrow \mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$. Elle est égale à g , car si $t \in [0, 1]$, $g(t)$ appartient à \mathcal{D} et il existe $e(t) \in \mathcal{E}$ tel que $g(t) = G(e(t))$, donc

$$(G \circ H \circ g)(t) = G \circ (H \circ G)(e(t)) = G(e(t)) = g(t).$$

D'après les propositions 3.3 et 3.5 de dérivation des applications composées, $G \circ H \circ g$ est dérivable en zéro et admet pour dérivée

$$\gamma \cdot \frac{\partial H}{\partial D}(D_0) \cdot \theta, \text{ si } \gamma \in \frac{\partial G}{\partial e}(e_0). \text{ Donc } \theta \text{ et } \gamma \cdot \frac{\partial H}{\partial D}(D_0) \cdot \theta \text{ appartiennent à}$$

$$\frac{\partial g}{\partial t}(0). \text{ Posons } \varepsilon = \frac{\partial H}{\partial D}(D_0) \cdot \theta. \text{ D'après le théorème 3.2 i), on a donc nécessairement, puisque } g(0) = D_0 \text{ est borné et est localement graphe lipschitzien}$$

$$\langle n, \theta \rangle = \langle n, \gamma \cdot \frac{\partial H}{\partial D}(D_0) \cdot \theta \rangle = \langle n, \gamma \cdot \varepsilon \rangle \text{ sur } \partial D_0.$$

On vérifie en considérant la fonction $H \circ g : [0, 1] \rightarrow E$ que ε appartient à $ET(E, \mathcal{E}, e_0)$, ce qui établit l'inclusion (3.59). ■

Démonstration de la partie iii) de la proposition 3.9.

Considérons l'ensemble

$$X = \{ \theta \in W^{k, \bar{c}}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \mid \langle n, \theta \rangle = \langle n, \gamma \cdot \varepsilon \rangle \text{ sur } \partial D_0, \varepsilon \in ET(E, \mathcal{E}, e_0) \}$$

où γ est un élément donné de $\frac{\partial G}{\partial e}(e_0)$.

L'inclusion (3.59) montre que $ET(\mathcal{D}_Q^{k, \bar{c}}, \mathcal{D}, D_0) \subset X$.

Or X peut s'écrire

$$X = \{ \theta \in W^{k, \bar{c}}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \mid \theta = \eta + \gamma \cdot \varepsilon, \eta \in W^{k, \bar{c}}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \langle n, \eta \rangle = 0 \text{ sur } \partial D_0, \varepsilon \in ET(E, \mathcal{E}, e_0) \}$$

D'après l'inclusion (3.57) et la remarque 3.7 (ici $\sigma = \bar{c}$) on a

$$X \subset ET(\mathcal{D}_Q^{k, \bar{c}}, \mathcal{D}, D_0), \text{ ce qui achève de démontrer (3.60).} \quad \blacksquare$$

Considérons maintenant le cas particulier où les domaines sont paramétrés par des homéomorphismes de \mathbb{R}^N les définissant, c'est à dire le cas où $\mathcal{D} = \{T(Q) \mid T \in \mathcal{C}\}$, \mathcal{C} étant une partie de $\mathcal{C}^{k, \sigma}$ qui peut elle même être paramétrée.

3.5.4. Famille de domaines paramétrée . Applications à la localisation d'un objet de forme donnée, et aux domaines définis par le graphe d'une fonction.

i) Localisation d'un objet de forme donnée.

Certains problèmes d'optimal design consistent à minimiser une fonctionnelle qui ne dépend que de la position d'un objet de forme donnée (cf. KOENIG-ZOLESIO [1] , [2]), c'est à dire à localiser cet objet.

On peut associer à un tel problème une famille de domaines dans un espace $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$. Nous allons étudier l'espace tangent à cette famille, et si $\sigma = \bar{c}$, nous le caractériserons.

Soit Q un ouvert de \mathbb{R}^N et \mathcal{E} un sous ensemble de \mathbb{R}^N . On considère la famille de domaines

$$\mathcal{D} = \{Q + e \mid e \in \mathcal{E}\} \quad \text{où } Q + e = \{x + e \mid x \in Q\}$$

L'ouvert $Q + e$ étant l'image de Q par la translation de vecteur e , il appartient à $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ pour tout $k \geq 0$ et pour $\sigma = \infty$ et \bar{c} .

Fixons k et σ (ce qui revient à munir \mathcal{D} de la topologie induite par $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$), alors la fonction $G : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ définie par $G(e) = Q + e$ est dérivable en tout point e_0 et l'application γ qui à $e \in \mathbb{R}^N$ associe le champ constant égal à e sur \mathbb{R}^N , appartient à $\frac{\partial G}{\partial e}(e_0)$.

On en déduit, d'après la proposition 3.9 i) et la remarque 3.7 que:

$$(3.63) \quad \text{ET}(\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}, \mathcal{D}, Q + e_0) \supset \{ \theta \in W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \mid \theta(x) = \varepsilon \quad \forall x \in \partial(Q + e_0), \\ \varepsilon \in \text{ET}(\mathbb{R}^N, \mathcal{E}, e_0) \}.$$

Si l'on a choisi $\sigma = \bar{c}$, et si Q est un ouvert borné de classe C^1 , on peut caractériser $\text{ET}(\mathcal{D}_Q^{k,\bar{c}}, \mathcal{D}, Q + e_0)$ de façon exacte grâce à la proposition 3.9 iii). On a :

$$(3.64) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ET}(\mathcal{D}_Q^{k, \bar{c}}, \mathcal{D}, Q + e_0) = \\ = \{ \theta \in W^{k, \bar{c}}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \mid \langle n, \theta \rangle = \langle n, \varepsilon \rangle \text{ sur } \partial(Q + e_0), \\ \varepsilon \in \text{ET}(\mathbb{R}^N, \mathcal{E}, e_0) \} . \end{array} \right.$$

Il suffit en effet de considérer la fonction H définie sur $\mathcal{D}_Q^{k, \bar{c}}$

et à valeurs dans \mathbb{R}^N par :

$$H(D) = \frac{1}{v} \int_D x \, dx - q$$

où v est le volume de Q et q son barycentre

$$v = \int_Q 1 \, dx \quad q = \frac{1}{v} \int_Q x \, dx .$$

Cette fonction H est dérivable en tout point de $\mathcal{D}_Q^{k, \bar{c}}$ d'après le théorème 4.2 et vérifie $H \circ G(e) = e$, $\forall e \in \mathbb{R}^N$. ■

ii) Domaines définis par le graphe d'une fonction.

Dans de nombreux problèmes d'optimal design (cf. par exemple BEGIS-GLOWINSKI [1] , DERVIEUX-PALMERIO [1] , [2]), on considère des domaines limités par le graphe d'une fonction. Cette fonction est le paramètre du problème.

On peut associer à un tel problème une famille de domaines dans un espace $\mathcal{D}_Q^{k, \sigma}$. Nous expliciterons une partie de l'espace tangent à cette famille.

Soit k un entier $k \geq 1$ et soit \mathcal{E} :

$$\mathcal{E} = \{ v \in C^k [0, 1] \mid \frac{1}{2} \leq v(x_1) \leq 1 \text{ sur } [0, 1] \}$$

A tout élément v de \mathcal{E} on associe le domaine D(v) de \mathbb{R}^2 défini par

$$D(v) = \{ (x_1, x_2) \mid 0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < v(x_1) \}$$

et on considère la famille $\mathcal{D} = \{ D(v) \mid v \in \mathcal{E} \}$

Soit $Q =]0, 1[\times]0, 1[= D(1)$; étant donné $v \in \mathcal{E}$,
 l'application $S(v)$ définie dans \bar{Q} par

$$(S(v))(x_1, x_2) = (x_1, x_2 + v(x_1))$$

est un C^k difféomorphisme de \bar{Q} sur $\overline{D(v)}$, et on peut construire un opérateur
 de prolongement π tel que $\pi(S(v))$ appartienne à $\mathcal{C}^{k, \bar{c}}$. Il en résulte que
 \mathcal{D} est inclus dans $\mathcal{D}_Q^{k, \bar{c}}$.

Nous allons maintenant expliciter une partie de $ET(\mathcal{D}_Q^{k, \bar{c}}, \mathcal{D}, D(v))$.

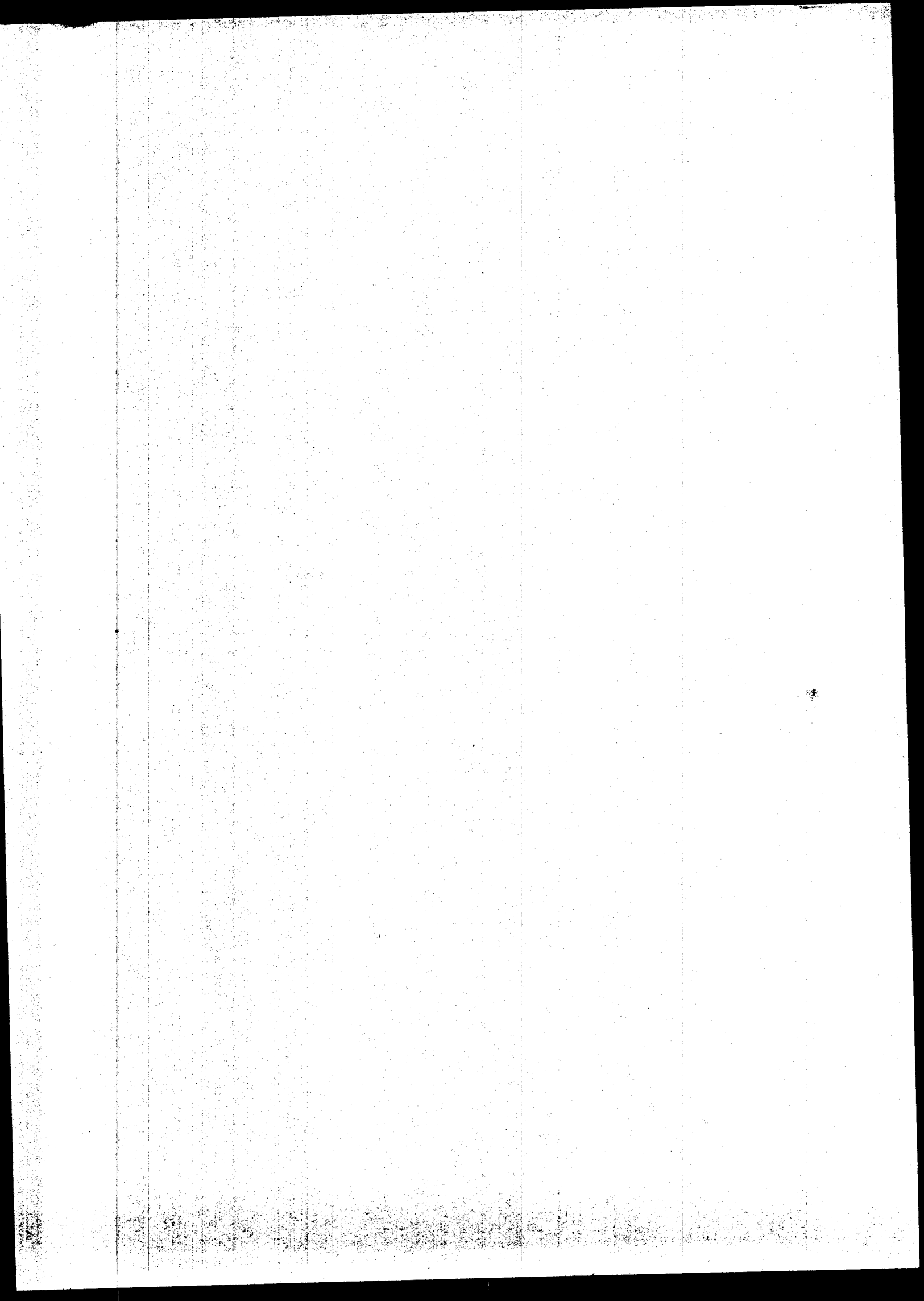
En utilisant la remarque 3.7 et en construisant l'opérateur de prolongement
 π convenablement (par exemple affine de $C^k(\bar{Q}, \mathbb{R}^2)$ dans $\mathcal{V}^{k, \bar{c}}$, ce qui est
 loisible), il résulte de la proposition 3.10 ii) que

$$\begin{aligned} ET(\mathcal{D}_Q^{k, \bar{c}}, \mathcal{D}, D(v)) \supset \\ \supset \{ \theta \in W^{k, \bar{c}}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \mid w \in ET(C^k[0, 1], \mathcal{E}, v) \\ \theta(x_1, x_2) = (0, x_2 + \frac{w(x_1)}{v(x_1)}) \text{ sur } \partial(D(v)) \} \end{aligned}$$

et il est classique que

$$ET(C^k[0, 1], \mathcal{E}, v) = \{ w \in C^k[0, 1] \mid w(x_1) \geq 0 \text{ si } v(x_1) = \frac{1}{2} \\ w(x_1) \leq 0 \text{ si } v(x_1) = 1 \}.$$

On a un résultat analogue si $\sigma = \infty$. On étend facilement cet
 exemple au cas d'une dimension N quelconque, ou à des domaines étoilés
 définis en coordonnées polaires dans \mathbb{R}^N . ■



IV. DERIVATION D'UNE INTEGRALE PAR RAPPORT A SON DOMAINE D'INTEGRATION.

4.0 INTRODUCTION.

Nous avons maintenant à notre disposition des espaces de domaines $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ munis d'une structure métrique complète et d'une structure différentielle, qui nous permettront, dans les chapitres ultérieurs, d'étudier des problèmes de contrôle par le domaine .

Nous serons en particulier amenés à étudier la dérivabilité de fonctionnelles définies sur $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$, à valeurs réelles, données par une intégrale sur le domaine "courant" D de $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$, ou sur son bord, c'est-à-dire par

$$J(D) = \int \phi(D) dx, \quad \text{ou bien} \quad J(D) = \int_{\partial D} \phi(D) ds$$

où $\phi(D)$ est une fonction définie sur D , ou bien sur ∂D , et qui dépend de D .

L'objet de ce chapitre est d'établir des résultats de dérivation généraux pour de telles fonctionnelles; il s'agit donc d'une généralisation à une dimension quelconque de la dérivation de $J([a,b]) = \int_a^b (\phi(a,b))(x) dx$

par rapport à a et b . Nous obtiendrons des résultats de dérivation de J en un point D_0 de $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ moyennant des hypothèses de dérivabilité du transporté $\bar{\phi}_{D_0}$ de ϕ sur le domaine fixe D_0 . Les hypothèses sont en

particulier vérifiées dans le cas où $\phi(D)$ est la restriction à D , ou la trace sur ∂D , d'une fonction f définie sur \mathbb{R}^N suffisamment régulière; si D_0 est assez régulier on a alors

$$\frac{\partial \left(\int_D f dx \right)}{\partial D} (D_0) \cdot \tau = \int_{\partial D} \langle n, \tau \rangle f ds, \quad \forall \tau \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$$

$$\frac{\partial \left(\int_{\partial D} f ds \right)}{\partial D} (D_0) \cdot \tau = \int_{\partial D_0} \langle n, \tau \rangle \left(\frac{\partial f}{\partial n} + H f \right) ds, \quad \forall \tau \in \dot{W}^{1,\bar{c}}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$$

où τ étant un "accroissement" de D_0 , $\langle n, \tau \rangle = \sum_{i=1}^N n_i \tau_i$ est l'accroissement normal correspondant, et où H est la courbure moyenne de ∂D_0 .

Pour établir ces résultats on utilisera des propriétés de dérivation de l'application $T \rightarrow f \circ T$ où T est un difféomorphisme de \mathbb{R}^N et f une fonction définie sur \mathbb{R}^N .

Dans les chapitres ultérieurs on aura en général $\phi(D) = \psi(u(D))$, $u(D)$ étant la solution d'une équation aux dérivées partielles dans D , et ces propriétés nous serviront à démontrer la dérivabilité du transporté \bar{u}_D de $u(D)$ sur un domaine fixe D_0 et à vérifier ainsi l'hypothèse de dérivabilité de $\bar{\phi}_{D_0}$.

On suivra le plan :

- 4.1 Dérivation de la composée d'une fonction par un difféomorphisme par rapport à celui-ci.
- 4.2 Dérivation d'une intégrale par rapport à son domaine d'intégration.
- 4.3 Généralités sur l'intégrale superficielle.
- 4.4 Dérivation d'une intégrale sur le bord d'un domaine par rapport au domaine.

Les démonstrations du paragraphe 4.1 sont souvent techniques et ne sont pas nécessaires à la compréhension des résultats ultérieurs. On suggère au lecteur de les sauter en première lecture pour en arriver plus rapidement aux paragraphes suivants qui concernent plus directement le contrôle par le domaine.

4.1. DERIVATION DE LA COMPOSEE D'UNE FONCTION PAR UN DIFFEOMORPHISME PAR RAPPORT A CELUI-CI.

4.1.1. Rappels sur les espaces de Sobolev.

On rappelle dans ce paragraphe quelques résultats classiques sur les espaces de Sobolev. Pour un exposé didactique de ces propriétés, on se référera par exemple à NECAS [1] .

Soit Q un ouvert de \mathbb{R}^N . On note $\mathcal{D}(Q)$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Q , et $\mathcal{D}'(Q)$ l'espace des distributions sur Q .

Soit m un entier, $m \geq 0$ et p tel que $1 \leq p \leq +\infty$. On définit $W^{m,p}(Q)$ par

$$(4.1) \quad W^{m,p}(Q) = \{ u \mid D^\alpha u \in L^p(Q) \quad \forall \alpha, |\alpha| \leq m \}$$

(où $D^\alpha u$ désigne la dérivée de u au sens des distributions sur Q), et on le munit de la norme

$$(4.2) \quad \begin{cases} \| u \|_{W^{m,p}(Q)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \| D^\alpha u \|_{L^p(Q)}^p \right)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < +\infty \\ \| u \|_{W^{m,\infty}(Q)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \| D^\alpha u \|_{L^\infty(Q)} \end{cases}$$

Muni de cette norme $W^{m,p}(Q)$ est un espace de Banach.

Si $1 < p < +\infty$, on désigne par $W_0^{m,p}(Q)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(Q)$ dans $W^{m,p}(Q)$ pour la norme définie par (4.2), et par $W^{-m,p'}(Q)$ le dual de $W_0^{m,p}(Q)$

($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$) que l'on munit de la norme duale.

Si Q est borné et si $1 < p < +\infty$, le théorème de Poincaré assure que

$$(4.3) \quad \| u \|_{W_0^{m,p}(Q)} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \| D^\alpha u \|_{L^p(Q)}^p \right)^{1/p}$$

est une norme équivalente sur $W_0^{m,p}(Q)$ à la norme définie par (4.2).

Pour $1 \leq p \leq +\infty$ et m entier, $m \geq 0$, on définit

$$W_{loc}^{m,p}(Q) = \{ v \mid v \text{ fonction mesurable sur } Q \\ v|_{\Omega} \in W^{m,p}(\Omega) \text{ pour tout ouvert borné } \Omega \text{ tel que } \bar{\Omega} \subset Q \}.$$

Les espaces de Sobolev construits sur L^2 sont des espaces de Hilbert et on note $W^{m,2}(Q) = H^m(Q)$ et $W_0^{m,2}(Q) = H_0^m(Q)$.

Rappelons enfin quelques propriétés des espaces de Sobolev.

(4.4) Si f appartient à $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ sa restriction à Q appartient à $W^{m,p}(Q)$.

(4.5) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } Q \text{ est un ouvert borné de classe } W^{1,\infty} \text{ et si } f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \\ (1 < p < +\infty) \text{ et est nulle p.p. dans } \mathbb{R}^N - Q, \text{ alors sa restriction à} \\ Q \text{ appartient à } W_0^{1,p}(Q). \end{array} \right.$

(4.6) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } f \text{ appartient à } W_0^{m,p}(Q) \text{ (} 1 < p < +\infty \text{), le prolongé } \tilde{f} \text{ de } f \text{ par} \\ \text{zéro en dehors de } Q \text{ appartient à } W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \quad (\text{si } m \geq 0) \end{array} \right.$

(4.7) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } Q \text{ est un ouvert borné, localement graphe lipschitzien, la trace} \\ \text{sur } \partial Q \text{ des fonctions de } W^{1,p}(Q) \text{ est définie et l'application} \\ f \rightarrow f|_{\partial Q} \text{ est linéaire continue de } W^{1,p}(Q) \text{ dans } W^{1-1/p,p}(\partial Q) \\ (1 \leq p \leq +\infty) \end{array} \right.$

4.1.2. Un résultat de changement de variable.

LEMME 4.1. Soit Q un ouvert de \mathbb{R}^N , $T \in \mathcal{C}^{1,\infty}$ et $1 \leq p \leq +\infty$

i) $f \in L^p(T(Q))$ si et seulement si $f \circ T \in L^p(Q)$, et :

$$(4.8) \left\{ \begin{array}{l} \int_{T(Q)} f \, dx = \int_Q (f \circ T) |\det [T']| \, dx \\ \int_{T(Q)} f |\det [(T^{-1})']| \, dx = \int_Q (f \circ T) \, dx \end{array} \right.$$

- ii) $f \in W^{1,p}(T(Q))$ si et seulement si $f \circ T \in W^{1,p}(Q)$ et ⁽¹⁾ :
- (4.9) $(\text{grad } f) \circ T = {}^t[T']^{-1} \text{grad } (f \circ T)$
- iii) Soit $1 < p < +\infty$; $f \in W_0^{1,p}(T(Q))$ si et seulement si $f \circ T \in W_0^{1,p}(Q)$.

Démonstration du lemme 4.1.

Le résultat i) est bien connu sous une hypothèse plus forte que $T \in \mathcal{C}^{1,\infty}$ (par exemple $T \in \mathcal{C}^{1,\bar{c}}$). Il est démontré dans VARBERG [1] sous une hypothèse plus faible que celle qui nous intéresse ici.

Le résultat ii) se démontre en prolongeant f par zéro en dehors de $T(Q)$, puis en régularisant (cf. par exemple NECAS [1] lemme 2.3.2.)

Démontrons iii). Si f appartient à $W_0^{1,p}(T(Q))$, il existe une suite de fonctions $\varphi_n \in \mathcal{D}(T(Q))$ telles que $\varphi_n \rightarrow f$ dans $W^{1,p}(T(Q))$. D'après ii), la fonction $\varphi_n \circ T$ appartient à $W^{1,p}(Q)$; elle est à support compact dans Q donc appartient à $W_0^{1,p}(Q)$. Or il résulte de i) et ii) que l'application $f \rightarrow f \circ T$ est linéaire continue de $W^{1,p}(T(Q))$ dans $W^{1,p}(Q)$. On en déduit que $\varphi_n \circ T$ converge vers $f \circ T$ dans $W^{1,p}(Q)$ et que donc $f \circ T \in W_0^{1,p}(Q)$ puisque cet espace est fermé.

Pour étudier les propriétés de continuité et de dérivabilité de l'application $T \rightarrow f \circ T$, nous utiliserons les égalités (4.8) et (4.9). Nous allons donc commencer par étudier les applications $T \rightarrow |\det [T']|$ et $T \rightarrow [T']^{-1}$.

(1) $\text{grad } f$ est noté comme un vecteur colonne et ${}^t[T']^{-1}$ désigne la matrice transposée de $[T']^{-1}$.

Remarque 4.1

On déduit du lemme 4.1 les majorations, pour $T \in \mathcal{C}^{1,\infty}$ et $1 < p < \infty$:

(4.10) {

i) Si $f \in L^p(T(Q))$

$$\|f\|_{L^p(T(Q))} \leq (\|\det [T']\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)})^{1/p} \|f \circ T\|_{L^p(Q)}$$

$$\|f \circ T\|_{L^p(Q)} \leq (\|\det ([T']^{-1})\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)})^{1/p} \|f\|_{L^p(T(Q))}$$

(4.11) {

ii) Si $f \in W^{1,p}(T(Q))$

$$\|\text{grad } f\|_{L^p(T(Q)), \mathbb{R}^N} \leq \|[T']^{-1}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{2N})} (\|\det [T']\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)})^{1/p} \times \|\text{grad } (f \circ T)\|_{L^p(Q, \mathbb{R}^N)}$$

$$\|\text{grad } (f \circ T)\|_{L^p(Q, \mathbb{R}^N)} \leq [T']\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{2N})} (\|\det ([T']^{-1})\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)})^{1/p} \times \|\text{grad } f\|_{L^p(T(Q), \mathbb{R}^N)}$$

Les lemmes 4.2 et 4.3 montreront que

(4.12) {

Les fonctions qui à T associent respectivement $\|\det [T']\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$,

$$\|\det ([T']^{-1})\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}, \|[T']\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{2N})}, \|[T']^{-1}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{2N})}$$

sont continues de $\mathcal{V}^{1,\infty}$ à valeurs dans \mathbb{R} en tout point $T \in \mathcal{C}^{1,\infty}$.

LEMME 4.2.

Soit $k \geq 1$ et $\sigma = +\infty$ ou \bar{c} . L'application $T \rightarrow |\det [T']|$ est dérivable de $\mathcal{V}^{k,\sigma}$ dans $W^{k-1,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ en tout point $T \in \mathcal{C}^{k,\sigma}$.

On a pour tout $\tau \in W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$

(4.13)
$$\frac{\partial (|\det [T']|)}{\partial T} (T) \cdot \tau = \{ (\text{div } (\tau \circ T^{-1})) \circ T \} |\det [T']|$$

Démonstration du lemme 4.2.

i) L'application $T \rightarrow \det [T']$ est dérivable de $\mathcal{V}^{k,\sigma}$ dans $W^{k-1,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ car c'est la composée de deux applications dérivables:

- D'une part l'application $T \rightarrow [T']$ qui est affine continue de $\mathcal{V}^{k,\sigma}$ dans $W^{k-1,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{2N})$ (pour $k \geq 1$).

- D'autre part l'application "déterminant", qui est multilinéaire continue (c'est un polynôme) de $W^{k-1,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{2N})$ dans $W^{k-1,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ (pour $k \geq 1$) et dont la dérivée vérifie pour tout $[B] \in W^{k-1,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{2N})$:

$$\frac{\partial(\det[A])}{\partial[A]}([A]) \cdot [B] = \sum_{j=1}^N \det([A]_1, \dots, [A]_{j-1}, [B]_j, [A]_{j+1}, \dots, [A]_N)$$

où $[A]_j$ désigne le $j^{\text{ème}}$ vecteur colonne de la matrice $[A]$.

On a donc pour tout $\tau \in W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$:

$$(4.14) \quad \frac{\partial(\det[T'])}{\partial T}(T) \cdot \tau = \sum_{j=1}^N \det([T']_1, \dots, [\tau]_j, \dots, [T']_N)$$

Si $T \in \mathcal{C}^{k,\sigma}$, la matrice $[T']$ est presque partout inversible (lemme 2.1).

En développant le $j^{\text{ème}}$ déterminant qui intervient dans (4.14) par rapport à sa $j^{\text{ème}}$ colonne, puis en utilisant la valeur d'un élément de l'inverse de la matrice $[T']$ en fonction de ses cofacteurs $C_{i,j}$, et enfin en utilisant (4.9)

on montre que :

$$(4.15) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial(\det[T'])}{\partial T}(T) \cdot \tau &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \frac{\partial \tau_i}{\partial x_j} C_{i,j} \\ &= \sum_{j,i=1}^N \frac{\partial \tau_i}{\partial x_j} ([T']^{-1})_{ij} \det [T'] \\ &= \{(\operatorname{div}(\tau \circ T^{-1})) \circ T\} \det [T'] \end{aligned} \right.$$

ii) En ce qui concerne la valeur absolue, il résulte du corollaire 2.1., que dès que $T \in \mathcal{C}^{1,\infty}$,

$$\det [T'] = 1 / \{ \det [(T^{-1})'] \circ T \} \quad \text{p.p. dans } \mathbb{R}^N$$

ce qui entraîne que

$$(4.16) \quad \inf_{x \in \mathbb{R}^N} \text{ess } |\det[T']| = \frac{1}{\|\det[(T^{-1})']\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}} > 0$$

- Si $k > 1$, $\det[T']$ étant une fonction continue sur \mathbb{R}^N , garde un signe constant, et l'application $T \rightarrow \det[T']$ étant continue de $\mathcal{C}^{k,\sigma}$ dans $C^0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ (comme on l'a vu au point i) on a pour τ assez petit dans $W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$

$$|\det[(T + \tau)']| = \{\text{signe}(\det[T'])\} \det[(T + \tau)']$$

- Si $k = 1$, l'application "valeur absolue" est dérivable de $W^{0,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ dans $W^{0,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ en tout point $f \in W^{0,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ tel que $|f(x)| \geq \alpha > 0$ (p.p. sur \mathbb{R}^N),

et elle a pour dérivée $\text{signe}(f)$. En effet pour $|z| \geq \alpha$ et $|y| < \alpha$

$$(4.17) \quad |z + y| = |z| + \{\text{signe}(z)\} y$$

iii) Des deux points i) et ii) on déduit le lemme 4.2 puisque

$$\{\text{signe}(f)\} f = |f| \quad .$$

LEMME 4.3. Soit $k \geq 1$ et $\sigma = +\infty$ ou \bar{c} ; l'application $T \rightarrow [T']^{-1}$ est dérivable de $\mathcal{V}^{k,\sigma}$ dans $W^{k-1,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{2N})$ en tout point $T \in \mathcal{C}^{k,\sigma}$ et l'on a

$$(4.18) \quad \begin{cases} \forall \tau \in W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \\ \frac{\partial([T']^{-1})}{\partial T}(T) \cdot \tau = -[T']^{-1} [\tau'] [T']^{-1} \end{cases}$$

Démonstration du lemme 4.3.

L'application $T \rightarrow [T']$ est affine continue de $\mathcal{V}^{k,\sigma}$ dans $W^{k-1,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{2N})$. D'autre part, dans une algèbre de Banach A (ici $W^{k-1,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{2N})$) munie de la somme et de la multiplication des matrices), l'application $a \rightarrow a^{-1}$ est dérivable en tout point inversible de A et l'on a :

$$\frac{\partial a^{-1}}{\partial a}(a) \cdot b = -a^{-1} b a^{-1} \quad \forall b \in A.$$

On en déduit immédiatement le lemme 4.3.

4.1.3. Dérivation de l'application $T \rightarrow f \circ T$ dans le cas où f est "régulière".

Nous allons donner ici des résultats de dérivation dans le cas où f appartient à $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ ($m \geq 1$), réservant au paragraphe suivant l'étude du cas où f appartient seulement à $L^p(\mathbb{R}^N)$.

LEMME 4.4.

i) Etant donnée $f \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$, où $m \geq 0$ (m entier) et $1 \leq p < +\infty$, l'application $T \rightarrow f \circ T$ est continue de $\mathcal{V}^{k,\sigma}$, où $k \geq \sup\{1, m\}$ et $\sigma = +\infty$ ou \bar{c} , dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$, en tout point $T \in \mathcal{E}^{k,\sigma}$.

ii) Etant donnée $f \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$, où $m \geq 1$ (m entier) et $1 \leq p < +\infty$, l'application $T \rightarrow f \circ T$ est dérivable de $\mathcal{V}^{k,\sigma}$, où $k \geq \sup\{1, m-1\}$ et $\sigma = +\infty$ ou \bar{c} , dans $W^{m-1,p}(\mathbb{R}^N)$, en tout point $T \in \mathcal{E}^{k,\sigma}$ et l'on a pour tout $\tau \in W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$

$$(4.19) \quad \frac{\partial(f \circ T)}{\partial T}(T) \cdot \tau = \langle \text{grad } f \rangle \circ T, \tau$$

Remarque 4.2.

i) Etant donné un ouvert Q de \mathbb{R}^N , l'application restriction $f \rightarrow f|_Q$ est linéaire continue, donc dérivable, de $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ dans $W^{m,p}(Q)$. Par composition avec cette application, on aura donc des résultats de dérivation relatifs à l'application $T \rightarrow (f \circ T)|_Q$.

ii) Soit Q un ouvert de \mathbb{R}^N , borné, localement graphe lipschitzien. L'application trace, $f \rightarrow f|_{\partial Q}$ est définie, linéaire et continue, donc dérivable de $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ dans $W^{1-1/p,p}(\partial Q)$ ($1 \leq p \leq +\infty$). De la partie ii) du lemme on déduit donc que si $f \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ ($1 \leq p < +\infty$) l'application $T \rightarrow (f \circ T)|_{\partial Q}$ est dérivable de $\mathcal{V}^{1,\infty}$ à valeurs dans $W^{1-1/p,p}(\partial Q)$ en tout point $T \in \mathcal{E}^{1,\infty}$.

Remarque 4.3.

Les résultats du lemme 4.4 sont faux dans le cas $p = +\infty$. Montrons le par exemple pour le résultat ii) :

Plaçons nous dans le cas $N = 1, m = 1$.

Soit $f \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

et soit $\theta \in W^{k,\sigma}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tel que $\theta(x) = x$ sur $[0,1]$.

Pour tout ε réel positif assez petit, on a

$$\frac{1}{\varepsilon} \| f \circ (I + \varepsilon\theta) - f - \varepsilon \langle \text{grad } f, \theta \rangle \|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 1$$

(qui ne tend pas vers zéro !). L'application $T \rightarrow f \circ T$ n'est donc pas dérivable de $\mathcal{V}^{k,\sigma}$ (quelque soit $k \geq 1$, et $\sigma = +\infty$ ou \bar{c}) à valeurs dans $L^\infty(\mathbb{R})$.

Démonstration de la partie i) du lemme 4.4.1) Le cas $m = 0, k = 1, \sigma = +\infty$

Soient donc $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $T \in \mathcal{C}^{1,\infty}$. On se donne une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, avec laquelle on approchera f et on écrit :

$$(4.20) \quad f \circ (T + \tau) - f \circ T = (f - \varphi) \circ (T + \tau) - (f - \varphi) \circ T + \\ + (\varphi \circ (T + \tau) - \varphi \circ T)$$

Majorons le second membre de (4.20). D'après (4.10), on a :

$$(4.21) \quad \| (f - \varphi) \circ T \|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \| f - \varphi \|_{L^p(\mathbb{R}^N)} (\| \det ([T']^{-1}) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)})^{1/p}$$

Si τ est assez petit dans $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, $T + \tau$ appartient à $\mathcal{C}^{1,\infty}$

et on a de même

$$(4.22) \quad \| (f - \varphi) \circ (T + \tau) \|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \| f - \varphi \|_{L^p(\mathbb{R}^N)} (\| \det ([(T + \tau)']^{-1}) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)})^{1/p}$$

Comme φ appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^N$:

$$(\varphi \circ (T + \tau))(x) - (\varphi \circ T)(x) = \int_0^1 \langle \text{grad } \varphi((T + h\tau)(x)), \tau(x) \rangle dh$$

En intégrant sur \mathbb{R}^N après avoir élevé à la puissance p , puis en utilisant le théorème de Fubini et le lemme 4.1 de changement de variable, il vient :

$$(4.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \|\varphi \circ (T + \tau) - \varphi \circ T\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \|\tau\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} \|\text{grad } \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} \times \\ \times \sup_{0 \leq h \leq 1} (\|\det[(T + h\tau)^{-1}]\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)})^{1/p} \end{array} \right.$$

En majorant le second membre de (4.20) avec (4.21), (4.22) et (4.23), on obtient, en utilisant les propriétés de continuité (4.12), que

$$(4.24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{il existe } \eta(T) > 0 \text{ telle que} \\ \forall \tau \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N), \|\tau\|_1 \leq \eta(T), \forall f \in L^p(\mathbb{R}^N), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N), \text{ on a} \\ \|\varphi \circ (T + \tau) - \varphi \circ T\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \\ \leq 3(\|\det[(T)^{-1}]\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)})^{1/p} \left\{ \|f - \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|\tau\|_0 \|\text{grad } \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} \right\} \end{array} \right.$$

En choisissant φ assez proche de f , puis en choisissant τ assez petit on peut rendre de 2ème membre de (4.21) aussi petit qu'on veut, ce qui établit la continuité de l'application $T \rightarrow f \circ T$ de $\mathcal{V}^{1,\infty}$ à valeurs dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ en tout point $T \in \mathcal{G}^{1,\infty}$.

2) Le cas général.

Notons tout d'abord que l'injection de $\mathcal{V}^{k,\sigma}$ dans $\mathcal{V}^{k',\infty}$, où $k \geq k' \geq 1$ et $\sigma = +\infty$ ou \bar{c} , est affine continue. Il suffit donc de montrer le lemme pour $\sigma = +\infty$, $k = \sup\{1, m\}$, c'est à dire que, pour $m \geq 0$, m entier, on a :

$$(4.25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } f \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N), \\ \text{l'application } T \rightarrow f \circ T \text{ est continue de } \mathcal{V}^{\sup\{1,m\},\infty} \\ \text{à valeurs dans } W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \text{ en tout point } T \in \mathcal{G}^{\sup\{1,m\},\infty}. \end{array} \right.$$

Nous allons démontrer cette propriété par récurrence. Notons que pour $m \geq 1$

(4.25) est équivalent à :

$$(4.26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } f \in W^{m,P}(\mathbb{R}^N) , \\ \text{l'application } T \rightarrow (f \circ T, \text{grad}(f \circ T)) \text{ est continue de } \mathcal{V}^{m,\infty} \text{ à} \\ \text{valeurs dans } W^{m-1,P}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+1}) \text{ en tout point } T \in \mathcal{C}^{m,\infty} . \end{array} \right.$$

En effet (4.25) entraîne trivialement (4.26); réciproquement, si (4.26) est vérifié, on a, au sens des distributions sur \mathbb{R}^N

$$\lim_{T_n \rightarrow T_0} (\text{grad}(f \circ T_n)) = \text{grad}(\lim_{T_n \rightarrow T_0} f \circ T_n) = \text{grad}(f \circ T_0)$$

et la propriété de continuité (4.26) entraîne alors (4.25) puisque

$$\|(\varphi, \text{grad } \varphi)\|_{W^{m-1,P}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+1})} \text{ est une norme équivalente à } \|\varphi\|_{W^{m,P}(\mathbb{R}^N)} .$$

Supposons donc la propriété (4.25) vérifiée à l'ordre $\mu > 0$, et soit $f \in W^{\mu+1,P}(\mathbb{R}^N)$. D'après (4.9) on a

$$(4.27) \quad \text{grad}(f \circ T) = {}^t[T'] \{(\text{grad } f) \circ T\}$$

Comme $\text{grad } f$ appartient à $W^{\mu,P}(\mathbb{R}^N)$ l'application $T \rightarrow (\text{grad } f) \circ T$ est continue de $\mathcal{V}^{\text{Sup}\{1,\mu\},\infty}$ à valeurs dans $W^{\mu,P}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, donc à fortiori de

$\mathcal{V}^{\mu+1,\infty}$ à valeurs dans $W^{\mu,P}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ en tout point $T \in \mathcal{C}^{\mu+1,\infty}$; de plus l'application $T \rightarrow {}^t[T']$ est affine continue de $\mathcal{V}^{\mu+1,\infty}$ dans $W^{\mu,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$; l'égalité (4.27) montre alors que l'application $T \rightarrow \text{grad}(f \circ T)$ est continue de $\mathcal{V}^{\mu+1,\infty}$ dans $W^{\mu,P}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ ce qui entraîne que la propriété (4.26), et donc la propriété (4.25), est vérifiée à l'ordre $\mu + 1$.

La propriété (4.25) a été établie pour l'ordre $m = 0$ au point 1), elle est donc démontrée par récurrence pour tout entier $m \geq 0$.

■

Démonstration de la partie ii) du lemme 4.4.

1) Le cas $m = 1, k = 1, \sigma = +\infty$.

Soient $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $T \in \mathcal{C}^{1,\infty}$ et $\tau \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$. Pour tout point $x \in \mathbb{R}^N$ on a :

$$\begin{aligned} (f \circ (T + \tau))(x) - (f \circ T)(x) &= \langle ((\text{grad } f) \circ T)(x), \tau(x) \rangle = \\ &= \int_0^1 \langle ((\text{grad } f) \circ (T + h\tau))(x) - ((\text{grad } f) \circ T)(x), \tau(x) \rangle dh. \end{aligned}$$

En intégrant sur \mathbb{R}^N et en utilisant le théorème de Fubini, il vient :

$$\begin{aligned} \| f \circ (T + \tau) - f \circ T - \langle (\text{grad } f) \circ T, \tau \rangle \|_{L^p(\mathbb{R}^N)} &\leq \\ &\leq \sup_{0 \leq h \leq 1} \| (\text{grad } f) \circ (T + h\tau) - (\text{grad } f) \circ T \|_{L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} \| \tau \|_{L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} \end{aligned}$$

En majorant le second membre avec (4.24) on obtient, pour tout τ tel que

$\| \tau \|_1 \leq \eta(T)$ et pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$:

$$(4.28) \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{\| \tau \|_1} \| f \circ (T + \tau) - f \circ T - \langle (\text{grad } f) \circ T, \tau \rangle \|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \\ &\leq 3 (\| \det([T']^{-1}) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)})^{1/p} \left\{ \| (\text{grad } f) - \varphi \|_{L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} + \| \tau \|_0 \| [\varphi'] \|_{L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{2N})} \right\} \end{aligned} \right.$$

Par densité, cette majoration est encore vérifiée pour $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

En choisissant alors φ assez proche de $\text{grad } f$, puis en supposant τ assez petit dans $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, on peut rendre le second membre de (4.28) aussi petit que l'on veut, ce qui montre que si $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ l'application $T \rightarrow f \circ T$ est dérivable de $\mathcal{V}^{1,\infty}$ à valeurs dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ en tout point $T \in \mathcal{C}^{1,\infty}$, et que sa dérivée est donnée par (4.19).

2) Le cas général.

La démonstration est analogue à celle de la partie 2) du point i) et s'effectue par récurrence. On va en indiquer les principales étapes.

Il suffit de démontrer la dérivabilité pour $\sigma = +\infty$, $k = \sup\{1, m-1\}$, $m \geq 1$, c'est-à-dire :

$$(4.29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } f \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \\ \text{l'application } T \rightarrow f \circ T \text{ est dérivable de } \mathcal{V}^{\text{Sup}\{1,m-1\},\infty} \text{ dans } W^{m-1,p}(\mathbb{R}^N) \\ \text{en tout point } T \in \mathcal{C}^{\text{Sup}\{1,m-1\},\infty}. \end{array} \right.$$

Les topologies de $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ et de $W^{l,p}(\mathbb{R}^N)$ étant compatibles, la dérivée sera alors donnée par (4.19).

On démontre d'abord que si $m \geq 2$, (4.29) est équivalent à

$$(4.30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } f \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \\ \text{l'application } T \rightarrow (f \circ T, \text{grad}(f \circ T)) \text{ est dérivable de } \mathcal{V}^{m-1,\infty} \\ \text{dans } W^{m-2,p}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+1}) \text{ en tout point } T \in \mathcal{C}^{m-1,\infty}. \end{array} \right.$$

Pour démontrer cette équivalence, on utilise le fait que l'on a au sens des distributions sur \mathbb{R}^N :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \text{grad}(f \circ T)}{\partial T}(T) \cdot \tau &= \lim_{h_n \rightarrow 0} \frac{1}{h_n} (\text{grad}(f \circ (T + h_n \tau)) - \text{grad}(f \circ T)) \\ &= \text{grad} \lim_{h_n \rightarrow 0} \frac{1}{h_n} (f \circ (T + h_n \tau) - f \circ T) \\ &= \text{grad} \left(\frac{\partial (f \circ T)}{\partial T} \right)(T) \cdot \tau \end{aligned}$$

En utilisant l'égalité (4.27) on montre que si (4.29) est vérifiée à l'ordre $\mu \geq 1$, (4.30), et donc (4.29), est vérifiée à l'ordre $\mu + 1$. La propriété (4.29) ayant été établie à l'ordre $m = 1$, elle est donc vraie pour tout $m \geq 1$.

Remarque 4.4.

Soit $f \in W^{l,p}(\mathbb{R}^N)$; en approchant f par des fonctions $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ et en passant à la limite dans la majoration (4.24) on obtient :

$$(4.31) \left\{ \begin{array}{l} \text{Etant donné } T \in \mathcal{C}^{1,\infty}, \text{ il existe } \eta(T) > 0 \text{ telle que} \\ \forall \tau \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N), \|\tau\|_1 \leq \eta(T), \quad \forall f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \text{ on a} \\ \|f \circ (T + \tau) - f \circ T\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq 3 \left(\|\det([T'])^{-1}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \right)^{1/p} \times \\ \times \|\tau\|_0 \|\text{grad } f\|_{L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} \end{array} \right.$$

4.1.4. Dérivation de l'application $T \rightarrow (f \circ T) |\det [T']|$ dans le cas où f est intégrable.

Nous allons dans ce paragraphe dériver l'application $T \rightarrow (f \circ T) |\det [T']|$ quand f est seulement dans $L^p(\mathbb{R}^N)$, résultat qui sera utilisé au chapitre 5.

Définition 4.1.

Soient $T \in \mathcal{C}^{1,\infty}$ et $1 < p, p' < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Etant donné $f \in W^{-1,p}(\mathbb{R}^N)$ on définit $(f \circ T) |\det [T']| \in W^{-1,p}(\mathbb{R}^N)$ par

$$(4.32) \left\{ \begin{array}{l} \langle\langle (f \circ T) |\det [T']|, \varphi \rangle\rangle_{W^{-1,p}, W^{1,p'}} = \langle\langle f, \varphi \circ T^{-1} \rangle\rangle_{W^{-1,p}, W^{1,p'}} \\ \forall \varphi \in W^{1,p'}(\mathbb{R}^N). \end{array} \right.$$

L'égalité (4.32) définit bien un élément de $W^{-1,p}(\mathbb{R}^N)$ puisque l'application $\varphi \rightarrow \varphi \circ T^{-1}$ est linéaire continue de $W^{1,p'}(\mathbb{R}^N)$ dans lui-même d'après le lemme 4.1 complété par les majorations (4.10) et (4.11).

La notation est justifiée car, quand $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\langle\langle f, \varphi \circ T^{-1} \rangle\rangle_{W^{-1,p}, W^{1,p'}} = \int_{\mathbb{R}^N} f(\varphi \circ T^{-1}) = \int_{\mathbb{R}^N} (f \circ T) |\det [T']| \varphi$$

Nous pouvons maintenant énoncer le :

LEMME 4.5.

Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 < p < \infty$. L'application $T \rightarrow (f \circ T) |\det [T']|$, définie sur $\mathcal{C}^{1,\infty}$ à valeurs dans $L^p(\mathbb{R}^N)$, est dérivable de $\mathcal{N}^{1,\infty}$ dans $W^{-1,p}(\mathbb{R}^N)$ en tout point $T \in \mathcal{C}^{1,\infty}$. On a pour tout $\tau \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$

$$(4.33) \quad \frac{\partial \langle (f \circ T) |\det [T']| \rangle}{\partial T}(T) \cdot \tau = \{ (\text{div}(f(\tau \circ T^{-1}))) \circ T \} |\det [T']|$$

Remarque 4.5.

Etant donné Q un ouvert de \mathbb{R}^N l'application restriction, définie comme transposée de l'application prolongement par 0 de $W_0^{1,p}(Q)$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, est linéaire continue, donc dérivable, de $W^{-1,p}(\mathbb{R}^N)$ dans $W^{-1,p}(Q)$. Par composition avec cette application on obtient des résultats de dérivation de l'application $T \rightarrow ((f \circ T) | \det [T'] |)|_Q$. ■

Remarque 4.6.

On ne dérive pas ici l'application $T \rightarrow f \circ T$. Si cette application était dérivable on aurait, d'après le lemme 4.4. ii)

$$\frac{\partial (f \circ T)}{\partial T}(T) \cdot \tau = \langle \text{grad } f \circ T, \tau \rangle$$

qu'on sait définir par transposition, quand $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, seulement si $T \in \mathcal{C}^{2,\infty}$. ■

Démonstration du lemme 4.5.

1) Une majoration pour $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.

Si $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, les lemmes 4.2 et 4.4 ii) montrent que l'application $T \rightarrow (f \circ T) | \det [T'] |$ est dérivable de $\mathcal{V}^{1,\infty}$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ en tout point $T \in \mathcal{C}^{1,\infty}$, et que pour tout $\tau \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, on a :

$$(4.35) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial ((f \circ T) | \det [T'] |)}{\partial T}(T) \cdot \tau = \\ & = \langle \text{grad } f \circ T, \tau \rangle | \det [T'] | + \{f \circ T\} (\text{div}(\tau \circ T^{-1})) \circ T | \det [T'] | \\ & = \{ \langle \text{grad } f, \tau \circ T^{-1} \rangle + f \text{ div}(\tau \circ T^{-1}) \} \circ T | \det [T'] | \\ & = \{ \text{div}(f \circ (\tau \circ T^{-1})) \} \circ T | \det [T'] | \end{aligned} \right.$$

D'autre part, d'après (4.9)

$$\{ \text{div}(f \circ (\tau \circ T^{-1})) \} \circ T = \sum_{i,j} (\tau [T']^{-1})_{i,j} \frac{\partial ((f \circ T) \tau_i)}{\partial x_j}$$

de sorte qu'en raison des lemmes 4.2, 4.3 et 4.4 i) l'application qui à T associe le second membre de (4.35) est continue de $\mathcal{V}^{1,\infty}$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ en tout point $T \in \mathcal{C}^{1,\infty}$.

Donnons nous $T \in \mathcal{E}^{1,\infty}$, le lemme 2.4 ii) montre que si τ est assez proche de 0 dans $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, $T + h\tau$ appartient à $\mathcal{E}^{1,\infty}$ pour tout $h \in [0,1]$. Le résultat ci-dessus montre alors que la fonction γ définie sur $[0,1]$ par

$$\gamma(h) = \left\{ f \circ (T + h\tau) \right\} |\det[(T + h\tau)']|$$

est continument dérivable de $[0,1]$ à valeurs dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ et que

$$(4.36) \quad \gamma'(h) = \left\{ \left\{ \operatorname{div}(f \circ (\tau \circ (T + h\tau)^{-1})) \right\} \circ (T + h\tau) \right\} |\det[(T + h\tau)']|$$

Notons

$$(4.37) \quad \begin{cases} X(f, T, \tau) = \left\{ f \circ (T + \tau) \right\} |\det[(T + \tau)']| - \left\{ f \circ T \right\} |\det[T']| \\ \quad - \left\{ \left\{ \operatorname{div}(f \circ (\tau \circ T^{-1})) \right\} \circ T \right\} |\det[T']| \end{cases}$$

La fonction $X(f, T, \tau)$ appartient à $L^p(\mathbb{R}^N)$ et l'on a

$$\begin{aligned} X(f, T, \tau) &= \gamma(1) - \gamma(0) - \gamma'(0) \\ &= \int_0^1 (\gamma'(h) - \gamma'(0)) dh \end{aligned}$$

d'où

$$(4.38) \quad \|X(f, T, \tau)\|_{W^{-1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq \sup_{0 \leq h \leq 1} \|\gamma'(h) - \gamma'(0)\|_{W^{-1,p}(\mathbb{R}^N)}$$

Majoration du second membre de (4.38).

Soit $\phi \in W^{1,p'}(\mathbb{R}^N)$. On a puisque $\gamma'(h) \in L^p(\mathbb{R}^N)$

$$\begin{aligned} \langle \gamma'(h), \phi \rangle_{W^{-1,p}, W^{1,p'}} &= \int_{\mathbb{R}^N} \gamma'(h) \phi = \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ \left\{ \operatorname{div}(f \circ (\tau \circ (T + h\tau)^{-1})) \right\} \circ (T + h\tau) \right\} |\det[(T + h\tau)']| \phi \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $(T + h\tau)^{-1}$, puis en intégrant par parties, et enfin en effectuant le changement de variable $I + h\tau \circ T^{-1}$, il vient grâce aux égalités (4.8) et (4.9):

$$\begin{aligned}
\langle\langle \gamma'(h), \phi \rangle\rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ \operatorname{div}(f(\tau \circ (T + h\tau)^{-1})) \right\} \left\{ \phi \circ (T + h\tau)^{-1} \right\} \\
&= - \int_{\mathbb{R}^N} f \langle \tau \circ (T + h\tau)^{-1}, \operatorname{grad}(\phi \circ (T + h\tau)^{-1}) \rangle \\
&= - \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ f \circ (I + h\tau \circ T^{-1}) \right\} \left| \det[(I + h\tau \circ T^{-1})'] \right| \chi \\
&\quad \chi \langle \tau \circ T^{-1}, {}^t[(I + h\tau \circ T^{-1})']^{-1} \operatorname{grad}(\phi \circ T^{-1}) \rangle
\end{aligned}$$

ce qui permet d'établir la majoration :

$$\begin{aligned}
|\langle\langle \gamma'(h) - \gamma'(0), \phi \rangle\rangle| &\leq \| \tau \circ T^{-1} \|_{L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} \| \operatorname{grad}(\phi \circ T^{-1}) \|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} \chi \\
&\times \left\{ \| f \circ (I + h\tau \circ T^{-1}) - f \|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \| \det[(I + h\tau \circ T^{-1})'] \|_{L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} \| [(I + h\tau \circ T^{-1})']^{-1} \|_{L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{2N})} + \right. \\
&\quad \left. + \| f \|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \| \det[(I + h\tau \circ T^{-1})'] \| \left[(I + h\tau \circ T^{-1})' \right]^{-1} - [I] \|_{L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{2N})} \right\}
\end{aligned}$$

En complétant cette majoration par :

$$\| \tau \circ T^{-1} \|_{L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} = \| \tau \|_0 \leq \| \tau \|_1$$

et par les majorations (4.11) et (4.24), et en utilisant la continuité des applications $T \rightarrow \det[T']$ et $T \rightarrow [T']^{-1}$ (lemmes 4.2 et 4.3), peut alors majorer le second membre de (4.38), ce qui donne :

$$\forall \tau \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N), \| \tau \|_1 \leq \eta(T) \text{ et } \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N),$$

$$(4.39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \| X(f, T, \tau) \|_{W^{-1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq \\ \leq \| \tau \|_1 C(T) \left\{ \| f - \varphi \|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \| \tau \|_0 \| \operatorname{grad} \varphi \|_{L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} \right. \\ \left. + \| f \|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \left\{ \sup_{0 \leq h \leq 1} \| \det[(I + h\tau \circ T^{-1})'] \| \left[(I + h\tau \circ T^{-1})' \right]^{-1} - [I] \|_{L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{2N})} \right\} \right\} \end{array} \right.$$

2) Démonstration de la dérivabilité.

Par densité, la majoration (4.39) est encore vérifiée pour $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$.

En choisissant φ assez proche de f , puis en supposant τ assez petit, on peut, en utilisant les propriétés de continuité résultant des lemmes 4.2 et 4.3,

rendre $\frac{1}{\|\tau\|_1} \|X(f,T,\tau)\|_{W^{-1,p}(\mathbb{R}^N)}$ aussi petit que l'on veut. Ceci établit

le résultat de dérivation annoncé, en raison de la définition (4.37) de $X(f,T,\tau)$.

4.1.5. Dérivation de l'application $T \rightarrow (\phi(T)) \circ T^{-1}$.

Nous allons, dans ce paragraphe, étendre le lemme de dérivation

4.4. ii) dans le cas où la fonction que l'on transporte par T dépend de T .

LEMME 4.6.

Soient m et k deux entiers tels que $m \geq 1$, $k \geq m$ et $1 \leq p < +\infty$, $\sigma = \infty$ ou \bar{c} . Soit ϕ une fonction définie sur $\mathcal{C}^{k,\sigma}$, à valeurs dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$, vérifiant :

$$(4.40) \quad \begin{cases} \phi \text{ est dérivable de } \mathcal{V}^{k,\sigma} \text{ à valeurs dans } W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \text{ en un point} \\ T_0 \in \mathcal{C}^{k,\sigma}. \end{cases}$$

Alors l'application $T \rightarrow (\phi(T)) \circ T^{-1}$ est dérivable de $\mathcal{V}^{k,\sigma}$ à valeurs dans $W^{m-1,p}(\mathbb{R}^N)$ au point T_0 , et l'on a, pour tout $\tau \in W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$:

$$(4.41) \quad \begin{cases} \frac{\partial((\phi(T)) \circ T^{-1})}{\partial T}(T_0) \cdot \tau = \\ = \left(\frac{\partial \phi}{\partial T}(T_0) \cdot \tau \right) \circ T_0^{-1} + \langle \text{grad}((\phi(T_0)) \circ T_0^{-1}), \tau \circ T_0^{-1} \rangle \end{cases}$$

Démonstration du lemme 4.6.

1) Le cas $m = 1$

On se donne donc $k \geq 1$ et $\sigma = \infty$ ou \bar{c} ; si τ est assez petit dans $W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, $T_0 + \tau$ appartient à $\mathcal{C}^{k,\sigma}$ d'après le lemme 2.4, et on pose :

$$(4.42) \quad \begin{cases} X(\tau) = (\phi(T_0 + \tau)) \circ (T_0 + \tau)^{-1} - (\phi(T_0)) \circ T_0^{-1} \\ - \left(\frac{\partial \phi}{\partial T}(T_0) \cdot \tau \right) \circ T_0^{-1} + \langle \text{grad}((\phi(T_0)) \circ T_0^{-1}), \tau \circ T_0^{-1} \rangle \end{cases}$$

La majoration (4.10) relative à $f = X(\tau)$ et à $T = T_0 + \tau$, complétée par la continuité de $T \rightarrow \|\det[T']\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$ montre que si $\|\tau\|_k$ est assez petit,

$$(4.43) \quad \|X(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq 2 \left(\|\det[T']\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \right)^{1/p} \| (X(\tau)) \circ (T_0 + \tau) \|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

En notant

$$(\phi(T_0)) \circ T_0^{-1} = f$$

on peut écrire :

$$(4.44) \quad \left\{ \begin{aligned} & (X(\tau)) \circ (T_0 + \tau) = \\ & = \phi(T_0 + \tau) - f \circ (T_0 + \tau) - \left(\frac{\partial \phi}{\partial T}(T_0) \cdot \tau \right) \circ T_0^{-1} \circ (T_0 + \tau) + \langle \text{grad } f, \tau \circ T_0^{-1} \rangle \circ (T_0 + \tau) \\ & = \phi(T_0 + \tau) - \phi(T_0) - \frac{\partial \phi}{\partial T}(T_0) \cdot \tau \\ & \quad - f \circ (T_0 + \tau) + f \circ T_0 + \langle \text{grad } f \rangle \circ T_0, \tau \rangle \\ & \quad - \left(\frac{\partial \phi}{\partial T}(T_0) \cdot \tau \right) \circ T_0^{-1} \circ (T_0 + \tau) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial T}(T_0) \cdot \tau \right) \circ T_0^{-1} \circ T_0 \\ & \quad + \langle \text{grad } f \rangle \circ (T_0 + \tau) - \langle \text{grad } f \rangle \circ T_0, \tau \circ T_0^{-1} \circ (T_0 + \tau) \rangle \\ & \quad + \langle \text{grad } f \rangle \circ T_0, \tau \circ T_0^{-1} \circ (T_0 + \tau) - \tau \circ T_0^{-1} \circ T_0 \rangle \end{aligned} \right.$$

Nous allons estimer le second membre de (4.44). D'après l'hypothèse de dérivabilité faite sur ϕ , on a :

$$(4.45) \quad \frac{1}{\|\tau\|_k} \left\| \phi(T_0 + \tau) - \phi(T_0) - \frac{\partial \phi}{\partial T}(T_0) \cdot \tau \right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \rightarrow 0 \text{ quand } \|\tau\|_k \rightarrow 0.$$

La fonction f appartenant à $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, on a d'après le lemme de dérivation 4.4 ii) :

$$(4.46) \quad \frac{1}{\|\tau\|_k} \left\| f \circ (T_0 + \tau) - f \circ T_0 - \langle \text{grad } f \rangle \circ T_0, \tau \rangle \right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \rightarrow 0 \text{ quand } \|\tau\|_k \rightarrow 0.$$

En utilisant (4.31) et (4.11) on majore, pour $\|\tau\|_k \leq \eta(T_0)$

$$(4.47) \left\{ \begin{array}{l} \left\| \left(\frac{\partial \phi}{\partial T}(T_0) \cdot \tau \right) \circ T_0^{-1} \circ (T_0 + \tau) - \left(\frac{\partial \phi}{\partial T}(T_0) \cdot \tau \right) \circ T_0^{-1} \circ T_0 \right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \\ \leq 3 \left(\|\det([T'_0]^{-1})\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \right)^{1/p} \|\tau\|_0 \\ \times \|[T'_0]^{-1}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{2N})} \left(\|\det[T'_0]\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \right)^{1/p} \|\text{grad} \left(\frac{\partial \phi}{\partial T}(T_0) \cdot \tau \right)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\ \leq C_1(T_0) \left\| \frac{\partial \phi}{\partial T}(T_0) \cdot \tau \right\|_{\mathcal{L}_c(W^{k, \sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N); W^{1, p}(\mathbb{R}^N))} \|\tau\|_k^2 \end{array} \right.$$

Comme $\text{grad } f$ appartient à $L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, le lemme de continuité 4.4 i)

montre que

$$(4.48) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\|\tau\|_k} \|\langle \text{grad } f \rangle \circ (T_0 + \tau) - \langle \text{grad } f \rangle \circ T_0, \tau \circ T_0^{-1} \circ (T_0 + \tau) \rangle\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\ \leq \|\langle \text{grad } f \rangle \circ (T_0 + \tau) - \langle \text{grad } f \rangle \circ T_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} \rightarrow 0 \quad \text{quand } \|\tau\|_k \rightarrow 0. \end{array} \right.$$

Enfin, le lemme 2.2 v) permet de majorer :

$$(4.49) \left\{ \begin{array}{l} \|\langle \text{grad } f \rangle \circ T_0, \tau \circ T_0^{-1} \circ (T_0 + \tau) - \tau \circ T_0^{-1} \circ T_0 \rangle\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \\ \leq \|\langle \text{grad } f \rangle \circ T_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} \|\tau \circ T_0^{-1} \circ (T_0 + \tau) - \tau \circ T_0^{-1} \circ T_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} \\ \leq \|\langle \text{grad } f \rangle \circ T_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} \gamma_0 \|\tau \circ T_0^{-1}\|_1 \|\tau\|_0 \leq c_2(T_0) \|\tau\|_k^2 \end{array} \right.$$

Les résultats (4.45) à (4.49) permettent d'estimer la norme dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ du second membre de (4.44), et avec (4.43), il vient :

$$\frac{1}{\|\tau\|_k} \|X(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \rightarrow 0 \quad \text{quand } \|\tau\|_k \rightarrow 0,$$

ce qui compte tenu de la définition (4.42) de $X(\tau)$, démontre le lemme pour

$m = 1$.

2) Le cas $m > 1$.

La démonstration est analogue à celle de la partie 2) de la démonstration du point ii) du lemme 4.4., et s'effectue par récurrence. On va en indiquer les principales étapes.

Notons tout d'abord qu'il suffit de démontrer que

$$(4.50) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{L'application } T \rightarrow (\phi(T)) \circ T^{-1} \text{ est dérivable de } \mathcal{V}^{k,\sigma} \text{ dans} \\ W^{m-1,p}(\mathbb{R}^N) \text{ au point } T_0; \end{array} \right.$$

Les topologies de $W^{m-1,p}(\mathbb{R}^N)$ étant compatibles, la dérivée sera alors donnée par (4.41).

On montre ensuite que, quand $m \geq 2$, (4.50) est équivalent à :

$$(4.51) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{L'application } T \rightarrow \{(\phi(T)) \circ T^{-1}, \text{grad}((\phi(T)) \circ T^{-1})\} \text{ est dérivable} \\ \text{de } \mathcal{V}^{k,\sigma} \text{ dans } W^{m-2,p}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+1}) \text{ au point } T_0, \end{array} \right.$$

puis on remarque que, d'après (4.9), on a

$$(4.52) \quad \text{grad}((\phi(T)) \circ T^{-1}) = ([T']^{-1} \text{grad } \phi(T)) \circ T^{-1}.$$

Supposons le lemme 4.6 vérifié pour un ordre $\mu \geq 1$, et soit ϕ une fonction vérifiant l'hypothèse (4.40) à l'ordre $\mu + 1$. En utilisant l'égalité (4.52) et le lemme 4.3, on montre que la fonction ϕ vérifie la propriété (4.51), et donc (4.50), à l'ordre $\mu + 1$, ce qui établit le lemme pour l'ordre $\mu + 1$.

Le lemme ayant été démontré pour l'ordre $\mu = 1$, ce raisonnement de récurrence le démontre pour tout $m \geq 1$.

■

4.2. DERIVATION D'UNE INTEGRALE PAR RAPPORT A SON DOMAINE D'INTEGRATION.

4.2.1. Cas général.

Nous allons nous intéresser à la dérivabilité de la fonctionnelle définie sur $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ par

$$(4.53) \quad J(D) = \int_D \phi(D) \, dx$$

où ϕ est définie sur $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$, où $k \geq 1$ et $\sigma = \infty$ ou \bar{c} , et telle que $\phi(D) \in L^1(D)$.

Rappelons que si θ est assez proche de zéro dans $W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, alors $I + \theta \in \mathcal{G}^{k,\sigma}$ et D étant fixé, $(I + \theta)(D) \in \mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$; on définit le transporté

ϕ_D de ϕ sur D par

$$(4.54) \quad \bar{\phi}_D(\theta) = \phi((I + \theta)(D)) \circ (I + \theta)$$

qui appartient à $L^1(D)$ d'après le lemme 4.1 de changement de variable. Notons que $\bar{\phi}_D(0) = \phi(D)$.

THEOREME 4.1.

Soit $D_0 \in \mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ où $k \geq 1$, $\sigma = \infty$ ou \bar{c} et où Q est un ouvert de \mathbb{R}^N .

Si l'application $\bar{\phi}_{D_0}$ définie par (4.54) est dérivable de $W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ à valeurs dans $L^1(D_0)$ au point 0, alors l'application J définie par (4.40) est dérivable de $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ dans \mathbb{R} au point D_0 et l'on a, pour tout $\tau \in W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$:

$$(4.55) \quad \frac{\partial J}{\partial D}(D_0) \cdot \tau = \int_{D_0} (\phi(D_0) \operatorname{div} \tau + \frac{\partial \bar{\phi}_{D_0}}{\partial \theta}(0) \cdot \tau) \, dx$$

Démonstration du théorème 4.1.

Il s'agit d'après la définition 3.1. de la dérivation, d'établir la dérivabilité de l'application $J_{D_0}^*$ définie sur un voisinage de 0 de

$W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ par

$$J_{D_0}^*(\theta) = J((I + \theta)(D_0)) = \int_{(I + \theta)(D_0)} \phi((I + \theta)(D_0)) \, dx$$

Le lemme 4.1 de changement de variable donne, avec (4.54),

$$(4.56) \quad J_{D_0}^*(\theta) = \int_{D_0} \bar{\phi}_{D_0}(\theta) |\det[(I + \theta)']| dx$$

L'hypothèse de dérivabilité de $\bar{\phi}_{D_0}$ jointe au lemme 4.2 de dérivation du

déterminant montre alors que $J_{D_0}^*$ est dérivable de $W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ à valeurs dans

\mathbb{R} au point 0 et que pour tout $\tau \in W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$:

$$\frac{\partial J_{D_0}^*}{\partial \theta}(0) \cdot \tau = \int_{D_0} (\phi(D_0) \operatorname{div} \tau + \frac{\partial \bar{\phi}_{D_0}}{\partial \theta}(0) \cdot \tau) dx$$

ce qui établit le théorème 4.1.

4.2.2. Cas où la fonction intégrée ne dépend pas du domaine.

Nous allons considérer le cas où $\phi(D)$ est la restriction à D d'une fonction f donnée dans \mathbb{R}^N , c'est à dire le cas où :

$$(4.57) \quad J(D) = \int_D f dx$$

THEOREME 4.2.

Soient Q un ouvert de \mathbb{R}^N , $k > 1$, $\sigma = \infty$ ou \bar{c} et $f \in W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$.

i) La fonction J définie par (4.57) est dérivable de $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ à

valeurs dans \mathbb{R} en tout point D et on a, pour tout $\tau \in W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$:

$$(4.58) \quad \frac{\partial J}{\partial D}(D) \cdot \tau = \int_D \operatorname{div}(f \tau) dx$$

ii) Si de plus D est borné et localement graphe lipschitzien on a pour tout $\tau \in W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$:

$$(4.59) \quad \frac{\partial J}{\partial E}(D) \cdot \tau = \int_{\partial D} \langle n, \tau \rangle f ds$$

où n est la normale extérieure à ∂D .

Remarque 4.7.

L'expression (4.59) de la dérivée de J permet de déterminer explicitement les directions τ de descente, pour la définition desquelles on renvoie à CEA [1], alors que (4.58) ne le permet pas.

Notons qu'on savait a priori, d'après le théorème 3.1, que $\frac{\partial J}{\partial D}(D) \cdot \tau$ ne dépend de τ que par sa trace normale $\langle n, \tau \rangle$ si D est de classe C^1 et $\sigma = \bar{c}$, mais cela ne suffit pas pour expliciter les directions de descente.

Démonstration du théorème 4.2.

Nous allons appliquer le théorème 4.1. On a ici

$$\bar{\phi}_D(\theta) = f|_{(I + \theta)(D)} \circ (I + \theta) = f \circ (I + \theta)|_D ;$$

le lemme de dérivation 4.4. ii) complété par la remarque 4.2. i) montre que $\bar{\phi}_D$ est dérivable de $W^{k, \sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ à valeurs dans $L^1(D)$ au point 0 avec pour tout

$$\tau \in W^{k, \sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$$

$$\frac{\partial \bar{\phi}_D}{\partial \theta}(0) \cdot \tau = \langle \text{grad } f, \tau \rangle|_D$$

et le théorème 4.1. montre alors que la partie i) du théorème est vérifiée.

Quand est borné et localement graphe lipschitzien il est loisible d'appliquer la formule de Green dans (4.58), ce qui établit (4.59).

4.3. GENERALITES SUR L'INTEGRALE SUPERFICIELLE.4.3.1. Définition de l'intégrale superficielle.

Rappelons la définition donnée dans NECAS [1].

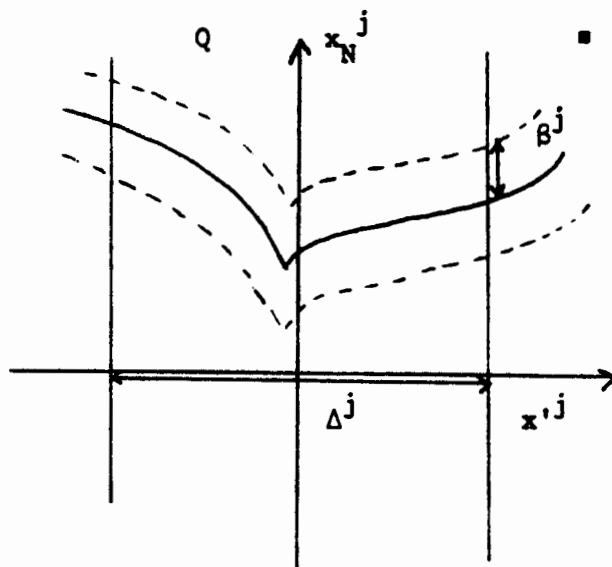
DEFINITION 4.2.

Soit Q un ouvert borné de \mathbb{R}^N localement graphe lipschitzien. On dit que $f \in L^1(\partial Q)$ si $f(x^i, \psi^j(x^i)) \in L^1(\Delta^j)$, et on définit son intégrale superficielle par :

$$(4.60) \quad \int_{\partial Q} f \, ds = \sum_{j=1}^m \int_{\Delta^j} f(x'^j, \psi^j(x'^j)) \alpha^j(x'^j, \psi^j(x'^j)) \times \\ \times \left(1 + \sum_{i=1}^{N-1} \left| \frac{\partial \psi^j}{\partial x_i^j}(x'^j) \right|^2 \right)^{1/2} dx'^j$$

où la frontière ∂Q est représentée sur le pavé Δ^j , dans le système d'axes (x'^j, x_N^j) par $x_N^j = \psi^j(x'^j)$, et où α^j est une partition de l'unité subordonnée au recouvrement de ∂Q par les $\Delta^j \times]\psi^j - \beta^j, \psi^j + \beta^j[$, ces ouverts étant en nombre fini (égal à m) puisque ∂Q est compact.

On montre que cette définition ne dépend pas du système de représentation $\{x'^j, x_N^j, \Delta^j, \psi^j, \beta^j\}$ ni de la partition de l'unité α^j .



On peut prolonger ψ^j en dehors de Δ^j en une fonction de $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^{N-1}_{x'^j})$ qu'on notera encore ψ^j . On définit alors une bijection de \mathbb{R}^N , $\hat{\psi}^j \in \mathcal{C}^{1,\infty}$, par

$$(4.61) \quad \hat{\psi}^j(x'^j, x_N^j) = (x'^j, x_N^j + \psi^j(x'^j))$$

Avec ces notations on peut écrire l'intégrale superficielle sous la forme

$$(4.62) \quad \int_{\partial Q} f \, ds = \sum_{j=1}^m \int_{\Delta^j} \{ (f \circ \hat{\psi}^j) \cdot |\text{grad}(\hat{\psi}^j)|_N \}_{\mathbb{R}^N} dx'^j$$

4.3.2. Changement de variable dans une intégrale superficielle.

LEMME 4.7.

Soit Q un ouvert borné de \mathbb{R}^N , localement graphe lipschitzien, et soient $T \in \mathcal{C}^1, \bar{c}$ et $f \in L^1(\partial(T(Q)))$.

Alors $f \circ T \in L^1(\partial Q)$ et

$$(4.63) \quad \int_{\partial(T(Q))} f \, ds = \int_{\partial Q} (f \circ T) |\det[T']| \left| [T']^{-1} n \right|_{\mathbb{R}^N} ds$$

où n est la norme extérieure à ∂Q .

Notons que si T appartenait seulement à \mathcal{C}^1, ∞ , on ne saurait pas définir les fonctions intégrables sur $\partial(T(Q))$ puisque $T(Q)$ ne serait pas nécessairement localement graphe lipschitzien.

Démonstration du lemme 4.7.

i) Localisation

Soit y_0 un point de ∂Q , il existe un système d'axes (y', y_N) d'origine y_0 et une fonction φ lipschitzienne tels que dans un voisinage cylindrique $\mathcal{V} = \{(y', y_N) \mid y' \in \mathcal{V}', \text{voisinage de } 0 \text{ dans } \mathbb{R}^{N-1}, |y_N| < \varepsilon\}$ de y_0 , ∂Q soit représenté par $y_N = \varphi(y')$.

De même puisque $T(Q)$ est localement graphe lipschitzien, il existe un système d'axes (x', x_N) d'origine $x_0 = T(y_0)$ et une fonction ψ lipschitzienne tels que dans un voisinage cylindrique \mathcal{W} de x_0 , $\partial(T(Q))$ soit représenté par $x_N = \psi(x')$.

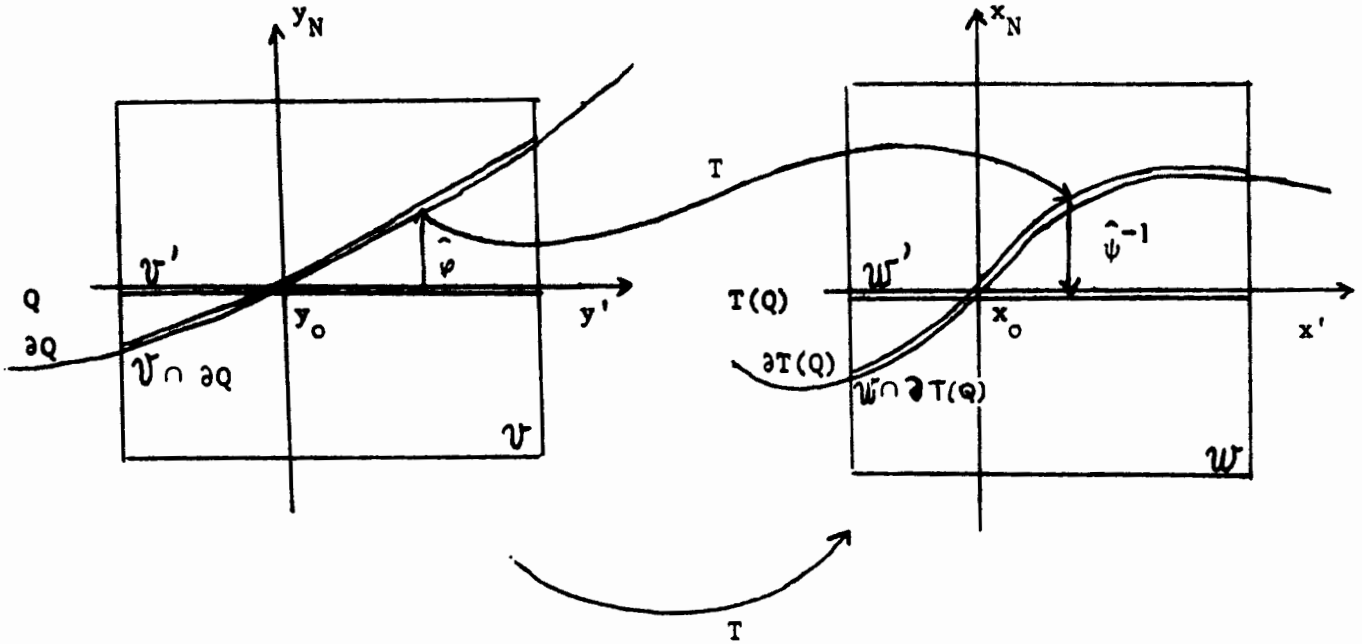
On suppose enfin, ce qui est toujours possible, que ⁽¹⁾

$$(4.64) \quad T(\mathcal{V} \cap \partial Q) = \mathcal{W} \cap \partial T(Q)$$

(1) Il suffit de considérer $\partial Q \cap \mathcal{V} \cap T^{-1}(\mathcal{W})$ et $T(\partial Q) \cap T(\mathcal{V}) \cap \mathcal{W}$ et de construire les voisinages cylindriques correspondants.

En définissant $\hat{\psi} \in \mathcal{C}^{1,\infty}$ par (4.61) et $\hat{\varphi}$ de façon analogue on a

$$(4.65) \quad \hat{\varphi}(\mathcal{V}) = \mathcal{V} \cap \partial Q, \quad \hat{\psi}(\mathcal{W}') = \mathcal{W}' \cap \partial T(Q)$$



Admettons un instant que

$$(4.66) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{si } g \in L^1(\mathcal{W}' \cap \partial T(Q)), \text{ alors } g \circ T \in L^1(\mathcal{V}' \cap \partial Q) \text{ et} \\ \int_{\mathcal{W}'} \{g \circ \hat{\psi}\} |\text{grad}(\hat{\psi}_N)|_{\mathbb{R}^N} dx' = \\ = \int_{\mathcal{V}'} \{g \circ T \circ \hat{\varphi}\} \{(|\det[T']| | [T']^{-1} n|_{\mathbb{R}^N}) \circ \hat{\varphi}\} |\text{grad}(\hat{\varphi}_N)|_{\mathbb{R}^N} dy' \end{array} \right.$$

En considérant un recouvrement fini de ∂Q par des cylindres \mathcal{V}_j

(ce qui est possible puisque ∂Q est compact), en posant $g^j = f \alpha^j$ où α^j est

une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement, et en additionnant les

égalités (4.66) relatives à \mathcal{V}_j, g^j on obtient alors que $g \circ T \in L^1(\partial Q)$ et

l'égalité (4.63) exprimée avec la formulation (4.62) de l'intégrale superficielle.

ii) Démonstration de (4.66).

On définit une bijection \hat{S} de R_y^N dans R_x^N par :

$$(4.67) \quad \hat{S} = \hat{\psi}^{-1} \circ T \circ \hat{\varphi} .$$

D'après la définition (4.61) $\hat{\varphi}, \hat{\psi} \in \mathcal{C}^{1,\infty}$, donc $\hat{S} \in \mathcal{C}^{1,\infty}$; soit S la restriction de \hat{S} à \mathcal{V}' , il en résulte avec (4.64) et (4.65) que :

(4.68) S est une bijection de \mathcal{V}' sur \mathcal{W}' lipschitzienne ainsi que son inverse.

Le lemme 4.1 relatif au changement de variable S (en dimension $N-1$) montre donc que

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } g \circ \hat{\psi} \in L^1(\mathcal{W}') , \text{ alors } g \circ T \circ \hat{\varphi} \in L^1(\mathcal{V}') \quad \text{et} \\ \int_{\mathcal{W}'} \{ g \circ \hat{\psi} \} |\text{grad } \hat{\psi}_N|_{R^N} dx' = \\ = \int_{\mathcal{V}'} \{ g \circ T \circ \hat{\varphi} \} \{ (|\text{grad } \hat{\psi}_N|_{R^N}) \circ \hat{\psi}^{-1} \circ T \circ \hat{\varphi} \} |\det [S']| dy' \end{array} \right.$$

Pour établir (4.66) il ne reste donc plus qu'à montrer que p.p.dans \mathcal{V}'

$$(4.69) \quad \left\{ \begin{array}{l} \{ (|\text{grad } \hat{\psi}_N|_{R^N}) \circ \hat{\psi}^{-1} \circ T \circ \hat{\varphi} \} |\det[S']| = \\ = |\text{grad } \hat{\varphi}_N|_{R^N} \{ (|[T']^{-1} n|_{R^N}) \circ \hat{\varphi} \} \{ |\det[T']| \} \circ \hat{\varphi} \end{array} \right.$$

iii) Démonstration de (4.69)

En raison de la définition (4.61) les applications $\hat{\varphi}$ et $\hat{\psi}^{-1}$ sont différentiables respectivement en tout point de $R_y^N - \{Z_\varphi \times R_{y_N}\}$ et de $R_x^N - \{Z_\psi \times R_{x_N}\}$ où Z_φ et Z_ψ sont des sous-ensembles de mesure nulle respectivement de R_y^{N-1} et R_x^{N-1} .

Il en résulte que $\hat{\varphi}$ est différentiable en tout point de $\mathcal{V}' - Z_\varphi$, et que $\hat{\psi}^{-1}$ est différentiable en tout point de $\mathcal{W}'(\partial(T(Q)) - \hat{\psi}(Z_\psi))$; comme de

plus T est différentiable en tout point de \mathbb{R}^N , donc de $\mathcal{V} \cap \partial Q$, cela entraîne avec (4.65) que $\hat{\psi}^{-1} \circ T \circ \hat{\psi}$ est différentiable en tout point de

$$\mathcal{V}' = \{z_\psi \cup (T \circ \hat{\psi})^{-1}(\hat{\psi}(z_\psi))\} = \mathcal{V}' = \{z_\psi \cup \hat{S}^{-1}(z_\psi)\}.$$

Or $\mathcal{V}' \cap \hat{S}^{-1}(z_\psi) = S^{-1}(\mathcal{W}' \cap z_\psi)$, et le lemme de Vitali montre d'après (4.68) que cet ensemble est de mesure nulle dans $\mathbb{R}_{y'}^{N-1}$.

Cela établit que $S = \hat{\psi}^{-1} \circ T \circ \hat{\psi}$ est différentiable presque partout dans \mathcal{V}' , et on a

$$(4.69) \text{bis } [\hat{S}'] = \{[(\hat{\psi}^{-1})'] \circ T \circ \hat{\psi}\} \{[T'] \circ \hat{\psi}\} [\hat{\psi}'] \quad \text{p.p. dans } \mathcal{V}'$$

Or

$$[\hat{\psi}'] = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \circ \\ & & & & \\ & \circ & & & \\ \frac{\partial \psi}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \psi}{\partial y_{N-1}} & & 1 \end{bmatrix} \quad [(\hat{\psi}^{-1})'] = \begin{bmatrix} 1 & & & & \circ \\ & 1 & & & \\ & & & & \\ & \circ & & & \\ -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} & \dots & -\frac{\partial \psi}{\partial x_{N-1}} & & 1 \end{bmatrix}$$

ce qui entraîne $\det [\hat{\psi}'] = \det [(\hat{\psi}^{-1})'] = 1$, donc

$$(4.70) \quad \det [\hat{S}'] = (\det [T']) \circ \varphi \quad \text{p.p. dans } \mathcal{V}'.$$

D'autre part en tout point de \mathcal{V}' où \hat{S} (application de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R}^N) est différentiable, sa restriction S (application de \mathbb{R}^{N-1} dans \mathbb{R}^{N-1}) l'est également et on a :

$$[\hat{S}'] = \begin{bmatrix} & & & & \frac{\partial \hat{S}_1}{\partial y_N} \\ & & & & \cdot \\ & & & & \cdot \\ & & & & \cdot \\ & & & & \cdot \\ & & & & \cdot \\ & & & & \cdot \\ \frac{\partial \hat{S}_N}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \hat{S}_N}{\partial y_{N-1}} & & \frac{\partial \hat{S}_N}{\partial y_N} \end{bmatrix} \quad \text{p.p. dans } \mathcal{V}'$$

Or il résulte de (4.68) que $\hat{S}_N(y', 0) = 0, \forall y' \in \mathcal{V}'$, donc

$$(4.71) \quad \frac{\partial \hat{S}_N}{\partial y_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N-1 \quad \text{p.p. dans } \mathcal{V}'$$

et en développant le déterminant de $[\hat{S}']$ par rapport à sa dernière ligne

il vient

$$(4.72) \quad \det [\hat{S}'] = \det [S'] \frac{\partial \hat{S}_N}{\partial y_N} \quad \text{p.p. dans } \mathcal{V}'$$

et avec (4.70) on obtient finalement

$$(4.73) \quad (\det [T']) \cdot \hat{\varphi} = \det [S'] \frac{\partial \hat{S}_N}{\partial y_N} \quad \text{p.p. dans } \mathcal{V}'$$

Calculons maintenant $\frac{\partial \hat{S}_N}{\partial y_N}$; d'après (4.69 bis) on a

$$\frac{\partial \hat{S}_N}{\partial y_i} = \sum_{k=1}^N \left\{ \frac{\partial (\hat{\psi}^{-1})_N}{\partial x_k} \cdot T \cdot \hat{\varphi} \right\} \frac{\partial (T \cdot \hat{\varphi})_k}{\partial y_i} \quad \text{p.p. dans } \mathcal{V}' ;$$

en notant $[M]_k$ le k-ième vecteur colonne d'une matrice $[M]$ on a alors

$$(4.74) \quad \frac{\partial \hat{S}_N}{\partial y_N} = \langle (\text{grad}(\hat{\psi}^{-1})_N) \cdot T \cdot \hat{\varphi}, [(T \cdot \hat{\varphi})']_N \rangle \quad \text{p.p. dans } \mathcal{V}' ;$$

or compte tenu de (4.71) on a presque partout dans \mathcal{V}'

$$\langle (\text{grad}(\hat{\psi}^{-1})_N) \cdot T \cdot \hat{\varphi}, [(T \cdot \hat{\varphi})']_i \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, N-1.$$

Cette dernière égalité entraîne que $(\text{grad}(\hat{\psi}^{-1})_N) \cdot T \cdot \hat{\varphi}$ est colinéaire à

$\bigwedge_{i=1}^{N-1} [(T \cdot \hat{\varphi})']_i$, donc (4.61) donne presque partout dans \mathcal{V}' :

$$(4.75) \quad \left| \frac{\partial \hat{S}_N}{\partial y_N} \right| = \frac{(|\text{grad}(\hat{\psi}^{-1})_N|_{\mathbb{R}^N}) \cdot T \cdot \hat{\varphi}}{\left| \bigwedge_{i=1}^{N-1} [(T \cdot \hat{\varphi})']_i \right|_{\mathbb{R}^N}} \left| \langle \bigwedge_{i=1}^{N-1} [(T \cdot \hat{\varphi})']_i, [(T \cdot \hat{\varphi})']_N \rangle \right|$$

Or pour toute matrice $[M]$ on a

$$\left\langle \bigwedge_{i=1}^{N-1} [M]_i, [M]_N \right\rangle = \det [M]$$

et quand $[M]$ est inversible on a (cela se montre en utilisant la caractérisation des éléments d'une matrice inverse comme quotient du cofacteur par le déterminant de la matrice)

$$\bigwedge_{i=1}^{N-1} [M]_i = \det [M] \left({}^t [M]^{-1} \right)_N.$$

L'égalité (4.75) donne donc, puisque $|\text{grad}(\hat{\psi}^{-1})|_{\mathbb{R}^N} = |\text{grad} \hat{\psi}|_{\mathbb{R}^N}$

qui ne dépend pas de x_N ,

$$(4.76) \quad \left| \frac{\partial \hat{S}_N}{\partial y_N} \right| = \frac{(|\text{grad} \hat{\psi}|_{\mathbb{R}^N}) \cdot \hat{\psi}^{-1} \cdot T \cdot \hat{\varphi}}{|({}^t[(T \cdot \hat{\varphi})']^{-1})_N|_{\mathbb{R}^N}} \quad \text{p.p. dans } \mathcal{U}'$$

Enfin ∂Q est localement représenté par $x_N - \varphi(x') = 0$, donc il a pour presque tout $x' \in \mathcal{U}'$ une normale au point $\hat{\varphi}(x')$, qui vaut

$$\begin{aligned} n(\hat{\varphi}(x')) &= \left(\sum_{i=1}^{N-1} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x') \right|^2 + 1 \right)^{-1/2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x'), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_{N-1}}(x'), -1 \right) \\ &= -(|\text{grad} \hat{\varphi}|_{\mathbb{R}^N})^{-1} ({}^t[\hat{\varphi}]^{-1})_N, \end{aligned}$$

comme ${}^t[(T \cdot \hat{\varphi})']^{-1} = \{ {}^t[T']^{-1} \cdot \hat{\varphi} \} \{ {}^t[\hat{\varphi}]^{-1} \}$, on a p.p. dans \mathcal{U}'

$$({}^t[(T \cdot \hat{\varphi})']^{-1})_N = \{ {}^t[T']^{-1} \cdot \hat{\varphi} \} ({}^t[\hat{\varphi}]^{-1})_N = \{ {}^t[T']^{-1} \cdot \hat{\varphi} \} (-|\text{grad} \hat{\varphi}|_{\mathbb{R}^N} (n \circ \hat{\varphi}))$$

On en déduit que

$$(4.77) \quad |({}^t[(T \cdot \hat{\varphi})']^{-1})_N|_{\mathbb{R}^N} = |\text{grad} \hat{\varphi}|_{\mathbb{R}^N} \{ |{}^t[T']^{-1} n|_{\mathbb{R}^N} \cdot \hat{\varphi} \}.$$

En utilisant les égalités (4.73), (4.76) et (4.77), on établit

(4.69), ce qui achève la démonstration du lemme.

4.3.3 Transport de la normale par un difféomorphisme.

Rappelons que tout ouvert Q de \mathbb{R}^N , localement graphe lipschitzien, a une normale extérieure presque partout sur ∂Q . On a le résultat de transport de normale suivant :

LEMME 4.8.

Soit Q un ouvert de \mathbb{R}^N localement graphe lipschitzien et soit $T \in \mathcal{C}^1, \bar{\mathcal{C}}$. On a :

$$(4.78) \quad n(T(Q)) \circ T = \frac{[T']^{-1} n(Q)}{|[T']^{-1} n(Q)|_{\mathbb{R}^N}} \quad \text{p.p. sur } \partial Q^{(1)},$$

où $n(D)$ est la normale extérieure à un domaine D .

Si Q est de classe \mathcal{C}^1 , (4.78) est vraie en tout point de ∂Q .

Démonstration du lemme 4.8.

Puisque Q est localement graphe lipschitzien, ∂Q est localement représenté par $x_N = \psi(x')$ pour $x' \in \Delta \subset \mathbb{R}^{N-1}$ où ψ est lipschitzienne. Posons

$$(4.79) \quad \phi(x) = \psi(x') - x_N,$$

∂Q et Q sont localement représentés par $\phi(x) = 0$ et $\phi(x) < 0$, et $\partial T(Q)$ et $T(Q)$ sont localement représentés par $\phi \circ T^{-1}(y) = 0$ et $\phi \circ T^{-1}(y) < 0$.

La fonction ψ est lipschitzienne, donc dérivable en presque tout point de Δ . Si x'_0 est un tel point, ϕ est dérivable au point $x_0 = (x'_0, \psi(x'_0))$ et

$$(4.80) \quad (n(Q))(x_0) = \frac{\text{grad } \phi(x_0)}{|\text{grad } \phi(x_0)|_{\mathbb{R}^N}}$$

(1) ce qui signifie que (4.78) a lieu au point $(x', \psi(x'))$ pour presque tout x' de Δ si ∂Q est représenté localement par le graphe $x_N = \psi(x')$ sur le pavé Δ .

Le théorème de dérivation des fonctions composées montre alors que

$$\phi \circ T^{-1} \text{ est dérivable au point } y_0 = T(x_0) \text{ et}$$

$$(4.81) \quad (n(T(Q)))(y_0) = \frac{(\text{grad } (\phi \circ T^{-1}))(y_0)}{|(\text{grad } (\phi \circ T^{-1}))(y_0)|_{\mathbb{R}^N}}$$

D'autre part on a

$$(4.82) \quad (\text{grad}(\phi \circ T^{-1}))(y_0) = ({}^t[T']^{-1} \text{grad } \phi)(x_0) = (\{{}^t[T']^{-1} n(Q)\} |\text{grad } \phi|)(x_0)$$

et (4.81) donne (4.78).

Si Q est de classe \mathcal{C}^1 , ϕ est de classe \mathcal{C}^1 et on peut faire le raisonnement en tout point de ∂Q (et non seulement presque partout).

4.3.4. Formule d'intégration par parties sur le bord d'un ouvert.

Donnons un lemme d'intégration par parties qui correspond à une formule de Green sur le bord d'un ouvert.

LEMME 4.9.

Soit Q un ouvert borné de classe $W^{2,\infty}$, f une fonction de $W^{2,1}(Q)$ et θ un champ de vecteurs de $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$. On a :

$$(4.83) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\partial Q} \{ \langle \theta, \text{grad } f \rangle + f(\text{div } \theta - \langle [\theta'] n, n \rangle) \} ds \\ = \int_{\partial Q} \langle n, \theta \rangle \left\{ \frac{\partial f}{\partial n} + Hf \right\} ds \end{array} \right.$$

où n est la normale extérieure à ∂Q , $\frac{\partial f}{\partial n} = \langle n, \text{grad } f \rangle$ et où H est la courbure moyenne de ∂Q .

Remarque 4.8.

i) Tous les termes de (4.83) ont un sens. En effet θ , $\text{div } \theta$ et $[\theta']$ sont continues et bornées sur Q , f et $\text{grad } f$ ont des traces dans $L^1(\partial Q)$ et

$\frac{\partial f}{\partial n}$ appartient à $L^1(\partial Q)$.

ii) La courbure moyenne H est définie comme somme des valeurs propres de l'application de Weingarten (cf. par exemple HICKS [1]).

Comme Q est de classe $W^{2,\infty}$, on peut représenter localement ∂Q , sur un pavé Δ de dimension $N-1$ et dans un système d'axes (x', x_N) , par $x_N = \psi(x')$ où ψ appartient à $W^{2,\infty}(\Delta)$; la courbure moyenne est alors donnée par :

$$(4.84) \quad \begin{cases} H(x', \psi(x')) = \left(1 + \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_k}(x')\right)^2\right)^{-3/2} \times \\ \times \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2}(x') \left(1 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x')\right)^2\right) - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j}(x') \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x') \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x') \right\} \end{cases}$$

On a donc $H \in L^\infty(\partial Q)$, et (4.84) redonne les formules habituelles de la courbure moyenne en dimension 2 et 3.

Démonstration du lemme 4.9.

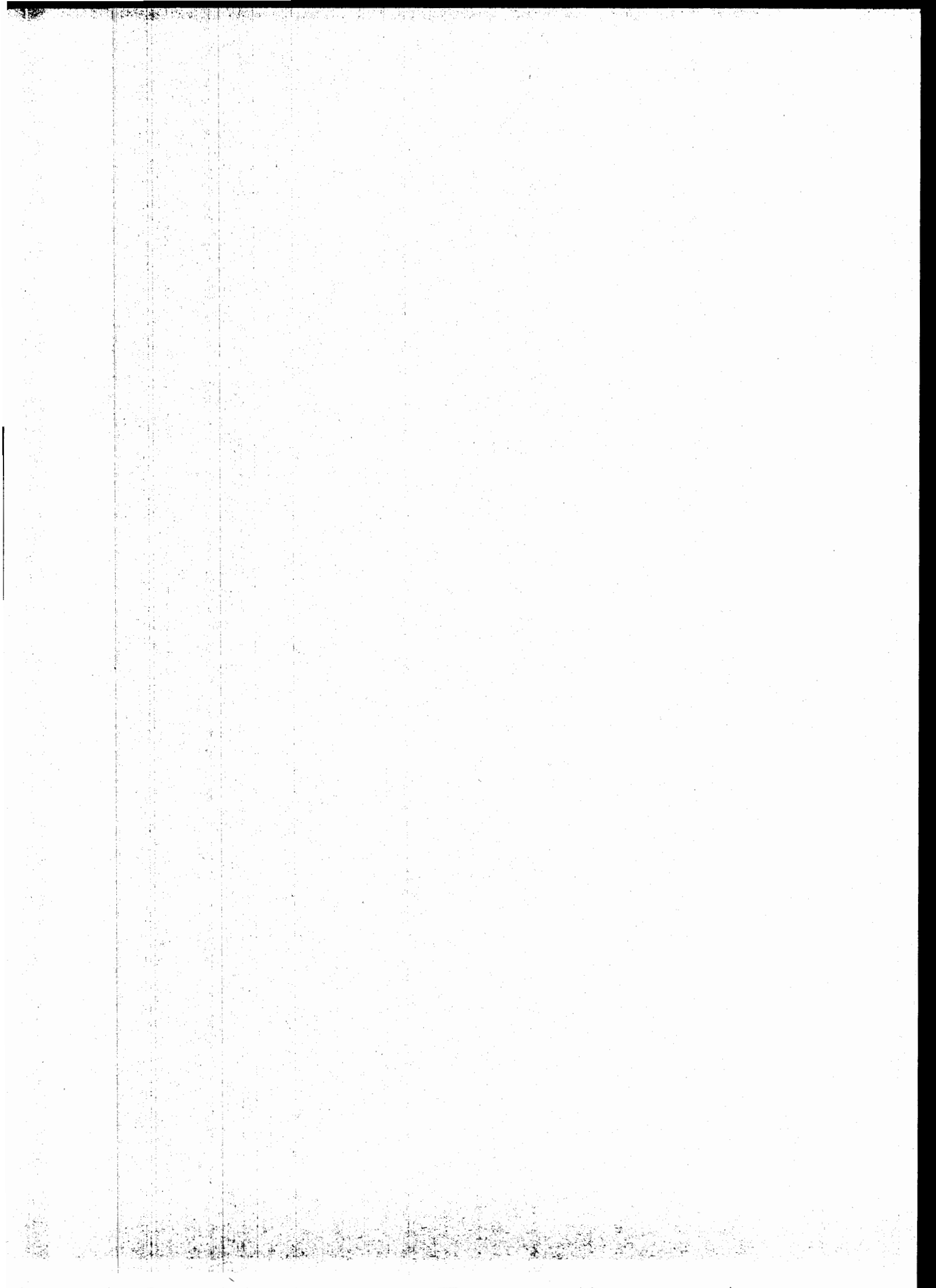
i) Localisation.

L'ouvert Q étant de classe $W^{2,\infty}$, la fonction $f \in W^{2,1}(Q)$ admet un prolongement appartenant à $W^{2,1}(\mathbb{R}^N)$ qu'on notera encore f .

En utilisant une partition de l'unité de ∂Q , comme dans la démonstration du lemme 4.7, on montre qu'il suffit d'établir (4.83) localement. Plus précisément on se donne un système d'axes (x', x_N) , un ouvert \mathcal{U}' de $\mathbb{R}^{N-1}_{x'}$ et une fonction ψ appartenant à $W^{2,\infty}(\mathcal{U}')$ tels que dans l'ouvert cylindrique de \mathbb{R}^N

$$\mathcal{U} = \{(x', x_N) \mid x' \in \mathcal{U}', |x_N| < \varepsilon\},$$

∂Q soit représenté par $x_N = \psi(x')$. En utilisant la formulation (4.62) de l'intégrale superficielle, il suffit, pour démontrer (4.83) d'établir que, pour f appartenant à $W^{2,1}(\mathcal{U})$ et à support compact dans \mathcal{U} , on a :



$$(4.85) \quad \left\{ \int_{\mathcal{V}'} \left\{ \langle \theta, \text{grad } f \rangle + f \text{ div } \theta - f \langle [\theta'] n, n \rangle \right\} \circ \psi \right\} |\text{grad } \hat{\psi}_N|_{\mathbb{R}^N} dx' = \\ = \int_{\mathcal{V}'} \left\{ \langle n, \theta \rangle \left(\frac{\partial f}{\partial n} + H f \right) \right\} \circ \hat{\psi} \Big|_{\mathbb{R}^N} |\text{grad } \hat{\psi}_N| dx'$$

où $\hat{\psi}(x', x_N) = (x', x_N + \psi(x'))$.

ii) Démonstration de (4.85).

Etant donné $\phi \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ le théorème de dérivation des applications composées montre que en tout point de \mathbb{R}^N

$$(4.86) \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) \circ \hat{\psi} = \frac{\partial(\phi \circ \hat{\psi})}{\partial x_j} - \frac{\partial(\phi \circ \hat{\psi})}{\partial x_N} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \quad j = 1, \dots, N-1$$

$$(4.87) \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_N} \right) \circ \hat{\psi} = \frac{\partial(\phi \circ \hat{\psi})}{\partial x_N}$$

On en déduit que en tout point de \mathbb{R}_x^{N-1} , on a

$$(4.88) \quad \left\{ \begin{aligned} & \{ \text{div } \theta - \langle [\theta'] n, n \rangle \} \circ \hat{\psi} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N ((\delta_{ij} - n_i n_j) \frac{\partial \theta_i}{\partial x_j}) \circ \hat{\psi} \\ & = \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ \sum_{j=1}^{N-1} (\delta_{ij} - (n_i \circ \hat{\psi})(n_j \circ \hat{\psi})) \frac{\partial(\theta_i \circ \hat{\psi})}{\partial x_j} + R_i \frac{\partial(\theta_i \circ \hat{\psi})}{\partial x_N} \right\} \end{aligned} \right.$$

où

$$R_i = - \left(\sum_{j=1}^{N-1} (\delta_{ij} - (n_i \circ \hat{\psi})(n_j \circ \hat{\psi})) \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) + \delta_{iN} - (n_i \circ \hat{\psi})(n_N \circ \hat{\psi}),$$

et où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker. Les composantes de la normale

$n \circ \hat{\psi}$ sont données par

$$(4.89) \quad \left\{ \begin{aligned} n_i \circ \hat{\psi} &= \frac{\partial \psi}{\partial x_i} / \sqrt{1 + \sum_{k=1}^{N-1} \left| \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \right|^2} \quad \text{si } i < N \\ n_N \circ \hat{\psi} &= -1 / \sqrt{1 + \sum_{k=1}^{N-1} \left| \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \right|^2} \end{aligned} \right.$$

et on vérifie que pour tout i , $R_i = 0$.

D'après nos hypothèses, $f \circ \hat{\psi}$ appartient à $W^{2,1}(\hat{\psi}^{-1}(\mathcal{V}))$, et

$$\hat{\psi}^{-1}(\mathcal{V}) = \{(x', x_N) \mid x' \in \mathcal{V}', |x_N - \psi(x')| < \varepsilon\}$$

donc $f \circ \hat{\psi}$ a une trace $f \circ \hat{\psi}|_{\mathcal{V}'}$, qui appartient à $W^{1,1}(\mathcal{V}')$, et l'on a $\frac{\partial}{\partial x_i}((f \circ \hat{\psi})|_{\mathcal{V}'}) = (\frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ \hat{\psi}))|_{\mathcal{V}'}$, si $1 \leq i \leq N-1$.

En utilisant (4.88) et en intégrant par parties, on a, puisque

$f \circ \hat{\psi}|_{\mathcal{V}'}$ est à support compact dans \mathcal{V}' :

$$(4.90) \quad \int_{\mathcal{V}'} \left\{ f \left(\operatorname{div} \theta - \langle [\theta'] n, n \rangle \right) \circ \hat{\psi} \right\} |\operatorname{grad} \psi_N|_{\mathbb{R}^N} dx' =$$

$$= \int_{\mathcal{V}'} (f \circ \hat{\psi}) \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{j=1}^{N-1} (\delta_{ij} - (n_i \circ \hat{\psi})(n_j \circ \hat{\psi})) \frac{\partial(\theta_i \circ \hat{\psi})}{\partial x_j} \right\} |\operatorname{grad} \psi_N|_{\mathbb{R}^N} dx'$$

$$= - \int_{\mathcal{V}'} \sum_{i=1}^N (\theta_i \circ \hat{\psi}) \left\{ \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\partial(f \circ \hat{\psi})}{\partial x_j} (\delta_{ij} - (n_i \circ \hat{\psi})(n_j \circ \hat{\psi})) |\operatorname{grad} \hat{\psi}_N|_{\mathbb{R}^N} + \right.$$

$$\left. + (f \circ \hat{\psi}) \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\partial}{\partial x_j} ((\delta_{ij} - (n_i \circ \hat{\psi})(n_j \circ \hat{\psi})) |\operatorname{grad} \hat{\psi}_N|_{\mathbb{R}^N}) \right\} dx'$$

D'après le lemme 4.1 ii), on a

$$\operatorname{grad}(f \circ \hat{\psi}) = [\hat{\psi}'] \{(\operatorname{grad} f) \circ \hat{\psi}\}.$$

et chaque expression a une trace sur \mathcal{V}' , de sorte que :

$$\begin{cases} \frac{\partial(f \circ \hat{\psi})}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} \circ \hat{\psi} + \frac{\partial f}{\partial x_N} \circ \hat{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} & 1 \leq j \leq N-1 \\ \frac{\partial(f \circ \hat{\psi})}{\partial x_N} = \frac{\partial f}{\partial x_N} \circ \hat{\psi} \end{cases}$$

En utilisant ces égalités, on vérifie que pour tout $i \leq N$, on a presque partout dans \mathcal{V}' :

IV. DERIVATION D'UNE INTEGRALE PAR RAPPORT A SON DOMAINE D'INTEGRATION.

4.0 INTRODUCTION.

Nous avons maintenant à notre disposition des espaces de domaines $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ munis d'une structure métrique complète et d'une structure différentielle, qui nous permettront, dans les chapitres ultérieurs, d'étudier des problèmes de contrôle par le domaine .

Nous serons en particulier amenés à étudier la dérivabilité de fonctionnelles définies sur $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$, à valeurs réelles, données par une intégrale sur le domaine "courant" D de $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$, ou sur son bord, c'est-à-dire par

$$J(D) = \int \phi(D) dx, \quad \text{ou bien} \quad J(D) = \int_{\partial D} \phi(D) ds$$

où $\phi(D)$ est une fonction définie sur D , ou bien sur ∂D , et qui dépend de D .

L'objet de ce chapitre est d'établir des résultats de dérivation généraux pour de telles fonctionnelles; il s'agit donc d'une généralisation à une dimension quelconque de la dérivation de $J([a,b]) = \int_a^b (\phi(a,b))(x) dx$

par rapport à a et b . Nous obtiendrons des résultats de dérivation de J en un point D_0 de $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ moyennant des hypothèses de dérivabilité du transporté $\bar{\phi}_{D_0}$ de ϕ sur le domaine fixe D_0 . Les hypothèses sont en

particulier vérifiées dans le cas où $\phi(D)$ est la restriction à D , ou la trace sur ∂D , d'une fonction f définie sur R^N suffisamment régulière; si D_0 est assez régulier on a alors

$$\frac{\partial \left(\int_D f dx \right)}{\partial D} (D_0) \cdot \tau = \int_{\partial D} \langle n, \tau \rangle f ds, \quad \forall \tau \in W^{1,\infty}(R^N, R^N)$$

$$\frac{\partial \left(\int_{\partial D} f ds \right)}{\partial D} (D_0) \cdot \tau = \int_{\partial D_0} \langle n, \tau \rangle \left(\frac{\partial f}{\partial n} + H f \right) ds, \quad \forall \tau \in \dot{W}^{1,\bar{C}}(R^N, R^N)$$

où τ étant un "accroissement" de D_0 , $\langle n, \tau \rangle = \sum_{i=1}^N n_i \tau_i$ est l'accroissement normal correspondant, et où H est la courbure moyenne de ∂D_0 .

Pour établir ces résultats on utilisera des propriétés de dérivation de l'application $T \rightarrow f \circ T$ où T est un difféomorphisme de \mathbb{R}^N et f une fonction définie sur \mathbb{R}^N .

Dans les chapitres ultérieurs on aura en général $\phi(D) = \psi(u(D))$, $u(D)$ étant la solution d'une équation aux dérivées partielles dans D , et ces propriétés nous serviront à démontrer la dérivabilité du transporté \bar{u}_{D_0} de $u(D)$ sur un domaine fixe D_0 et à vérifier ainsi l'hypothèse de dérivabilité de $\bar{\phi}_{D_0}$.

On suivra le plan :

- 4.1 Dérivation de la composée d'une fonction par un difféomorphisme par rapport à celui-ci.
- 4.2 Dérivation d'une intégrale par rapport à son domaine d'intégration.
- 4.3 Généralités sur l'intégrale superficielle.
- 4.4 Dérivation d'une intégrale sur le bord d'un domaine par rapport au domaine.

Les démonstrations du paragraphe 4.1 sont souvent techniques et ne sont pas nécessaires à la compréhension des résultats ultérieurs. On suggère au lecteur de les sauter en première lecture pour en arriver plus rapidement aux paragraphes suivants qui concernent plus directement le contrôle par le domaine.

4.1. DERIVATION DE LA COMPOSEE D'UNE FONCTION PAR UN DIFFEOMORPHISME PAR RAPPORT A CELUI-CI.

4.1.1. Rappels sur les espaces de Sobolev.

On rappelle dans ce paragraphe quelques résultats classiques sur les espaces de Sobolev. Pour un exposé didactique de ces propriétés, on se référera par exemple à NECAS [1] .

Soit Q un ouvert de \mathbb{R}^N . On note $\mathcal{D}(Q)$ l'ensemble des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Q , et $\mathcal{D}'(Q)$ l'espace des distributions sur Q .

Soit m un entier, $m \geq 0$ et p tel que $1 \leq p \leq +\infty$. On définit $W^{m,p}(Q)$ par

$$(4.1) \quad W^{m,p}(Q) = \{ u \mid D^\alpha u \in L^p(Q) \quad \forall \alpha, |\alpha| \leq m \}$$

(où $D^\alpha u$ désigne la dérivée de u au sens des distributions sur Q), et on le

munit de la norme

$$(4.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \| u \|_{W^{m,p}(Q)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \| D^\alpha u \|_{L^p(Q)}^p \right)^{1/p} \quad \text{si } 1 \leq p < +\infty \\ \| u \|_{W^{m,\infty}(Q)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \| D^\alpha u \|_{L^\infty(Q)} \end{array} \right.$$

Muni de cette norme $W^{m,p}(Q)$ est un espace de Banach.

Si $1 < p < +\infty$, on désigne par $W_0^{m,p}(Q)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(Q)$ dans $W^{m,p}(Q)$ pour la norme définie par (4.2), et par $W^{-m,p'}(Q)$ le dual de $W_0^{m,p}(Q)$

($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$) que l'on munit de la norme duale.

Si Q est borné et si $1 < p < +\infty$, le théorème de Poincaré assure que

$$(4.3) \quad \| u \|_{W_0^{m,p}(Q)} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \| D^\alpha u \|_{L^p(Q)}^p \right)^{1/p}$$

est une norme équivalente sur $W_0^{m,p}(Q)$ à la norme définie par (4.2).

Pour $1 \leq p \leq +\infty$ et m entier, $m \geq 0$, on définit

$$W_{loc}^{m,p}(Q) = \{ v \mid v \text{ fonction mesurable sur } Q \\ v|_{\Omega} \in W^{m,p}(\Omega) \text{ pour tout ouvert borné } \Omega \text{ tel que } \bar{\Omega} \subset Q \}.$$

Les espaces de Sobolev construits sur L^2 sont des espaces de Hilbert et on note $W^{m,2}(Q) = H^m(Q)$ et $W_0^{m,2}(Q) = H_0^m(Q)$.

Rappelons enfin quelques propriétés des espaces de Sobolev.

(4.4) Si f appartient à $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ sa restriction à Q appartient à $W^{m,p}(Q)$.

(4.5) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } Q \text{ est un ouvert borné de classe } W^{1,\infty} \text{ et si } f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \\ (1 < p < +\infty) \text{ et est nulle p.p. dans } \mathbb{R}^N - Q, \text{ alors sa restriction à} \\ Q \text{ appartient à } W_0^{1,p}(Q). \end{array} \right.$

(4.6) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } f \text{ appartient à } W_0^{m,p}(Q) \text{ (} 1 < p < +\infty \text{), le prolongé } \tilde{f} \text{ de } f \text{ par} \\ \text{zéro en dehors de } Q \text{ appartient à } W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \quad (\text{si } m \geq 0) \end{array} \right.$

(4.7) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } Q \text{ est un ouvert borné, localement graphe lipschitzien, la trace} \\ \text{sur } \partial Q \text{ des fonctions de } W^{1,p}(Q) \text{ est définie et l'application} \\ f \rightarrow f|_{\partial Q} \text{ est linéaire continue de } W^{1,p}(Q) \text{ dans } W^{1-1/p,p}(\partial Q) \\ (1 \leq p \leq +\infty) \end{array} \right.$

4.1.2. Un résultat de changement de variable.

LEMME 4.1. Soit Q un ouvert de \mathbb{R}^N , $T \in \mathcal{C}^{1,\infty}$ et $1 \leq p \leq +\infty$

i) $f \in L^p(T(Q))$ si et seulement si $f \circ T \in L^p(Q)$, et :

$$(4.8) \left\{ \begin{array}{l} \int_{T(Q)} f \, dx = \int_Q (f \circ T) |\det [T']| \, dx \\ \int_{T(Q)} f |\det [(T^{-1})']| \, dx = \int_Q (f \circ T) \, dx \end{array} \right.$$

- ii) $f \in W^{1,p}(T(Q))$ si et seulement si $f \circ T \in W^{1,p}(Q)$ et ⁽¹⁾ :
- (4.9) $(\text{grad } f) \circ T = {}^t [T']^{-1} \text{grad } (f \circ T)$
- iii) Soit $1 < p < +\infty$; $f \in W_0^{1,p}(T(Q))$ si et seulement si $f \circ T \in W_0^{1,p}(Q)$.

Démonstration du lemme 4.1.

Le résultat i) est bien connu sous une hypothèse plus forte que $T \in \mathcal{C}^{1,\infty}$ (par exemple $T \in \mathcal{C}^{1,\bar{c}}$). Il est démontré dans VARBERG [1] sous une hypothèse plus faible que celle qui nous intéresse ici.

Le résultat ii) se démontre en prolongeant f par zéro en dehors de $T(Q)$, puis en régularisant (cf. par exemple NECAS [1] lemme 2.3.2.)

Démontrons iii). Si f appartient à $W_0^{1,p}(T(Q))$, il existe une suite de fonctions $\varphi_n \in \mathcal{D}(T(Q))$ telles que $\varphi_n \rightarrow f$ dans $W^{1,p}(T(Q))$. D'après ii), la fonction $\varphi_n \circ T$ appartient à $W^{1,p}(Q)$; elle est à support compact dans Q donc appartient à $W_0^{1,p}(Q)$. Or il résulte de i) et ii) que l'application $f \rightarrow f \circ T$ est linéaire continue de $W^{1,p}(T(Q))$ dans $W^{1,p}(Q)$. On en déduit que $\varphi_n \circ T$ converge vers $f \circ T$ dans $W^{1,p}(Q)$ et que donc $f \circ T \in W_0^{1,p}(Q)$ puisque cet espace est fermé.

Pour étudier les propriétés de continuité et de dérivabilité de l'application $T \rightarrow f \circ T$, nous utiliserons les égalités (4.8) et (4.9). Nous allons donc commencer par étudier les applications $T \rightarrow |\det [T']|$ et $T \rightarrow [T']^{-1}$.

(1) $\text{grad } f$ est noté comme un vecteur colonne et ${}^t [T']^{-1}$ désigne la matrice transposée de $[T']^{-1}$.

Remarque 4.1

On déduit du lemme 4.1 les majorations, pour $T \in \mathcal{C}^{1,\infty}$ et $1 < p < \infty$:

$$(4.10) \left\{ \begin{array}{l} \text{i) Si } f \in L^p(T(Q)) \\ \|f\|_{L^p(T(Q))} \leq (\|\det [T']\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)})^{1/p} \|f \circ T\|_{L^p(Q)} \\ \|f \circ T\|_{L^p(Q)} \leq (\|\det ([T']^{-1})\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)})^{1/p} \|f\|_{L^p(T(Q))} \end{array} \right.$$

$$(4.11) \left\{ \begin{array}{l} \text{ii) Si } f \in W^{1,p}(T(Q)) \\ \|\text{grad } f\|_{L^p(T(Q)), \mathbb{R}^N} \leq \|[T']^{-1}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{2N})} (\|\det [T']\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)})^{1/p} \times \\ \quad \times \|\text{grad } (f \circ T)\|_{L^p(Q, \mathbb{R}^N)} \\ \|\text{grad } (f \circ T)\|_{L^p(Q, \mathbb{R}^N)} \leq \|[T']\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{2N})} (\|\det ([T']^{-1})\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)})^{1/p} \times \\ \quad \times \|\text{grad } f\|_{L^p(T(Q), \mathbb{R}^N)} \end{array} \right.$$

Les lemmes 4.2 et 4.3 montreront que

$$(4.12) \left\{ \begin{array}{l} \text{Les fonctions qui à } T \text{ associent respectivement } \|\det [T']\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}, \\ \|\det ([T']^{-1})\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}, \|[T']\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{2N})}, \|[T']^{-1}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{2N})} \\ \text{sont continues de } \mathcal{V}^{1,\infty} \text{ à valeurs dans } \mathbb{R} \text{ en tout point } T \in \mathcal{C}^{1,\infty}. \end{array} \right.$$

LEMME 4.2.

Soit $k \geq 1$ et $\sigma = +\infty$ ou \bar{c} . L'application $T \rightarrow |\det [T']|$ est dérivable de $\mathcal{V}^{k,\sigma}$ dans $W^{k-1,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ en tout point $T \in \mathcal{C}^{k,\sigma}$.

On a pour tout $\tau \in W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$

$$(4.13) \quad \frac{\partial (|\det [T']|)}{\partial T} (T) \cdot \tau = \left\{ (\text{div } (\tau \circ T^{-1})) \circ T \right\} |\det [T']|$$

Démonstration du lemme 4.2.

i) L'application $T \rightarrow \det [T']$ est dérivable de $\mathcal{V}^{k,\sigma}$ dans $W^{k-1,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ car c'est la composée de deux applications dérivables:

- D'une part l'application $T \rightarrow [T']$ qui est affine continue de $\mathcal{V}^{k,\sigma}$ dans $W^{k-1,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{2N})$ (pour $k \geq 1$).

- D'autre part l'application "déterminant", qui est multilinéaire continue (c'est un polynôme) de $W^{k-1,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{2N})$ dans $W^{k-1,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ (pour $k \geq 1$) et dont la dérivée vérifie pour tout $[B] \in W^{k-1,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{2N})$:

$$\frac{\partial(\det[A])}{\partial[A]}([A]) \cdot [B] = \sum_{j=1}^N \det([A]_1, \dots, [A]_{j-1}, [B]_j, [A]_{j+1}, \dots, [A]_N)$$

où $[A]_i$ désigne le $i^{\text{ème}}$ vecteur colonne de la matrice $[A]$.

On a donc pour tout $\tau \in W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$:

$$(4.14) \quad \frac{\partial(\det[T'])}{\partial T}(T) \cdot \tau = \sum_{j=1}^N \det([T']_1, \dots, [\tau]_j, \dots, [T']_N)$$

Si $T \in \mathcal{C}^{k,\sigma}$, la matrice $[T']$ est presque partout inversible (lemme 2.1).

En développant le $j^{\text{ème}}$ déterminant qui intervient dans (4.14) par rapport à sa $j^{\text{ème}}$ colonne, puis en utilisant la valeur d'un élément de l'inverse de la matrice $[T']$ en fonction de ses cofacteurs $C_{i,j}$, et enfin en utilisant (4.9)

on montre que :

$$(4.15) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial(\det[T'])}{\partial T}(T) \cdot \tau &= \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N \frac{\partial \tau_i}{\partial x_j} C_{i,j} \\ &= \sum_{j,i=1}^N \frac{\partial \tau_i}{\partial x_j} ([T']^{-1})_{ij} \det [T'] \\ &= \{(\operatorname{div}(\tau \circ T^{-1})) \circ T\} \det [T'] \end{aligned} \right.$$

ii) En ce qui concerne la valeur absolue, il résulte du corollaire 2.1., que dès que $T \in \mathcal{C}^{1,\infty}$,

$$\det [T'] = 1 / \{ \det [(T^{-1})'] \} \circ T \quad \text{p.p. dans } \mathbb{R}^N$$

ce qui entraîne que

$$(4.16) \quad \inf_{x \in \mathbb{R}^N} \text{ess } |\det[T']| = 1 / (\| \det[(T^{-1})'] \|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}) > 0$$

- Si $k > 1$, $\det[T']$ étant une fonction continue sur \mathbb{R}^N , garde un signe constant, et l'application $T \rightarrow \det[T']$ étant continue de $\mathcal{C}^{k,\sigma}$ dans $C^0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ (comme on l'a vu au point i) on a pour τ assez petit dans $W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$

$$|\det[(T + \tau)']| = \{\text{signe}(\det[T'])\} \det[(T + \tau)']$$

- Si $k = 1$, l'application "valeur absolue" est dérivable de $W^{0,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ dans $W^{0,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ en tout point $f \in W^{0,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ tel que $|f(x)| > \alpha > 0$ (p.p. sur \mathbb{R}^N),

et elle a pour dérivée $\text{signe}(f)$. En effet pour $|z| > \alpha$ et $|y| < \alpha$

$$(4.17) \quad |z + y| = |z| + \{\text{signe}(z)\} y$$

iii) Des deux points i) et ii) on déduit le lemme 4.2 puisque

$$\{\text{signe}(f)\} f = |f| .$$

LEMME 4.3. Soit $k \geq 1$ et $\sigma = +\infty$ ou \bar{c} ; l'application $T \rightarrow [T']^{-1}$ est dérivable de $\mathcal{V}^{k,\sigma}$ dans $W^{k-1,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{2N})$ en tout point $T \in \mathcal{C}^{k,\sigma}$ et l'on a

$$(4.18) \quad \begin{cases} \forall \tau \in W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \\ \frac{\partial([T']^{-1})}{\partial T}(T) \cdot \tau = - [T']^{-1} [\tau'] [T']^{-1} \end{cases}$$

Démonstration du lemme 4.3.

L'application $T \rightarrow [T']$ est affine continue de $\mathcal{V}^{k,\sigma}$ dans $W^{k-1,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{2N})$. D'autre part, dans une algèbre de Banach A (ici $W^{k-1,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{2N})$) munie de la somme et de la multiplication des matrices, l'application $a \rightarrow a^{-1}$ est dérivable en tout point inversible de A et l'on a :

$$\frac{\partial a^{-1}}{\partial a}(a) \cdot b = - a^{-1} b a^{-1} \quad \forall b \in A.$$

On en déduit immédiatement le lemme 4.3.

4.1.3. Dérivation de l'application $T \rightarrow f \circ T$ dans le cas où f est "régulière".

Nous allons donner ici des résultats de dérivation dans le cas où f appartient à $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ ($m \geq 1$), réservant au paragraphe suivant l'étude du cas où f appartient seulement à $L^p(\mathbb{R}^N)$.

LEMME 4.4.

i) Etant donnée $f \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$, où $m \geq 0$ (m entier) et $1 \leq p < +\infty$, l'application $T \rightarrow f \circ T$ est continue de $\mathcal{U}^{k,\sigma}$, où $k \geq \sup\{1, m\}$ et $\sigma = +\infty$ ou \bar{c} , dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$, en tout point $T \in \mathcal{E}^{k,\sigma}$.

ii) Etant donnée $f \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$, où $m \geq 1$ (m entier) et $1 \leq p < +\infty$, l'application $T \rightarrow f \circ T$ est dérivable de $\mathcal{U}^{k,\sigma}$, où $k \geq \sup\{1, m-1\}$ et $\sigma = +\infty$ ou \bar{c} , dans $W^{m-1,p}(\mathbb{R}^N)$, en tout point $T \in \mathcal{E}^{k,\sigma}$ et l'on a pour tout $\tau \in W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$

$$(4.19) \quad \frac{\partial(f \circ T)}{\partial T}(T) \cdot \tau = \langle \text{grad } f \rangle \circ T, \tau >$$

Remarque 4.2.

i) Etant donné un ouvert Q de \mathbb{R}^N , l'application restriction $f \rightarrow f|_Q$ est linéaire continue, donc dérivable, de $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ dans $W^{m,p}(Q)$. Par composition avec cette application, on aura donc des résultats de dérivation relatifs à l'application $T \rightarrow (f \circ T)|_Q$.

ii) Soit Q un ouvert de \mathbb{R}^N , borné, localement graphe lipschitzien. L'application trace, $f \rightarrow f|_{\partial Q}$ est définie, linéaire et continue, donc dérivable de $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ dans $W^{1-1/p,p}(\partial Q)$ ($1 \leq p \leq +\infty$). De la partie ii) du lemme on déduit donc que si $f \in W^{2,p}(\mathbb{R}^N)$ ($1 \leq p < +\infty$) l'application $T \rightarrow (f \circ T)|_{\partial Q}$ est dérivable de $\mathcal{U}^{1,\infty}$ à valeurs dans $W^{1-1/p,p}(\partial Q)$ en tout point $T \in \mathcal{E}^{1,\infty}$.

Remarque 4.3.

Les résultats du lemme 4.4 sont faux dans le cas $p = +\infty$. Montrons le par exemple pour le résultat ii) :

Plaçons nous dans le cas $N = 1, m = 1$.

Soit $f \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

et soit $\theta \in W^{k,\sigma}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tel que $\theta(x) = x$ sur $[0,1]$.

Pour tout ε réel positif assez petit, on a

$$\frac{1}{\varepsilon} \| f \circ (I + \varepsilon\theta) - f - \varepsilon \langle \text{grad } f, \theta \rangle \|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 1$$

(qui ne tend pas vers zéro !). L'application $T \rightarrow f \circ T$ n'est donc pas dérivable de $\mathcal{V}^{k,\sigma}$ (quelque soit $k \geq 1$, et $\sigma = +\infty$ ou \bar{c}) à valeurs dans $L^\infty(\mathbb{R})$.

Démonstration de la partie i) du lemme 4.4.1) Le cas $m = 0, k = 1, \sigma = +\infty$

Soient donc $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $T \in \mathcal{G}^{1,\infty}$. On se donne une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, avec laquelle on approchera f et on écrit :

$$(4.20) \quad f \circ (T + \tau) - f \circ T = (f - \varphi) \circ (T + \tau) - (f - \varphi) \circ T + \\ + (\varphi \circ (T + \tau) - \varphi \circ T)$$

Majorons le second membre de (4.20). D'après (4.10), on a :

$$(4.21) \quad \| (f - \varphi) \circ T \|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \| f - \varphi \|_{L^p(\mathbb{R}^N)} (\| \det ([T]^{-1}) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)})^{1/p}$$

Si τ est assez petit dans $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, $T + \tau$ appartient à $\mathcal{G}^{1,\infty}$

et on a de même

$$(4.22) \quad \| (f - \varphi) \circ (T + \tau) \|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \| f - \varphi \|_{L^p(\mathbb{R}^N)} (\| \det [(T + \tau)]^{-1} \|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)})^{1/p}$$

Comme φ appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^N$:

$$(\varphi \circ (T + \tau))(x) - (\varphi \circ T)(x) = \int_0^1 \langle \text{grad } \varphi((T + h\tau)(x)), \tau(x) \rangle dh$$

En intégrant sur \mathbb{R}^N après avoir élevé à la puissance p , puis en utilisant le théorème de Fubini et le lemme 4.1 de changement de variable, il vient :

$$(4.23) \left\{ \begin{array}{l} \|\varphi \circ (T + \tau) - \varphi \circ T\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \|\tau\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} \|\text{grad } \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)}^{\times} \\ \times \sup_{0 \leq h \leq 1} (\|\det[(T + h\tau)^{-1}]\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)})^{1/p} \end{array} \right.$$

En majorant le second membre de (4.20) avec (4.21), (4.22) et (4.23), on obtient, en utilisant les propriétés de continuité (4.12), que

$$(4.24) \left\{ \begin{array}{l} \text{il existe } \eta(T) > 0 \text{ telle que} \\ \forall \tau \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N), \|\tau\|_1 \leq \eta(T), \forall f \in L^p(\mathbb{R}^N), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N), \text{ on a} \\ \|\varphi \circ (T + \tau) - \varphi \circ T\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \\ \leq 3(\|\det([T']^{-1})\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)})^{1/p} \left\{ \|f - \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|\tau\|_0 \|\text{grad } \varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} \right\} \end{array} \right.$$

En choisissant φ assez proche de f , puis en choisissant τ assez petit on peut rendre de 2ème membre de (4.21) aussi petit qu'on veut, ce qui établit la continuité de l'application $T \rightarrow f \circ T$ de $\mathcal{U}^{1,\infty}$ à valeurs dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ en tout point $T \in \mathcal{G}^{1,\infty}$.

2) Le cas général.

Notons tout d'abord que l'injection de $\mathcal{V}^{k,\sigma}$ dans $\mathcal{V}^{k',\infty}$, où $k \geq k' \geq 1$ et $\sigma = +\infty$ ou \bar{c} , est affine continue. Il suffit donc de montrer le lemme pour $\sigma = +\infty$, $k = \sup\{1, m\}$, c'est à dire que, pour $m \geq 0$, m entier, on a :

$$(4.25) \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } f \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N), \\ \text{l'application } T \rightarrow f \circ T \text{ est continue de } \mathcal{U}^{\sup\{1,m\},\infty} \\ \text{à valeurs dans } W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \text{ en tout point } T \in \mathcal{G}^{\sup\{1,m\},\infty}. \end{array} \right.$$

Nous allons démontrer cette propriété par récurrence. Notons que pour $m \geq 1$

(4.25) est équivalent à :

$$(4.26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } f \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N) , \\ \text{l'application } T \rightarrow (f \circ T, \text{grad}(f \circ T)) \text{ est continue de } \mathcal{V}^{m,\infty} \text{ à} \\ \text{valeurs dans } W^{m-1,p}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+1}) \text{ en tout point } T \in \mathcal{C}^{m,\infty} . \end{array} \right.$$

En effet (4.25) entraîne trivialement (4.26); réciproquement, si (4.26) est vérifié, on a, au sens des distributions sur \mathbb{R}^N

$$\lim_{T_n \rightarrow T_0} (\text{grad}(f \circ T_n)) = \text{grad}(\lim_{T_n \rightarrow T_0} f \circ T_n) = \text{grad}(f \circ T_0)$$

et la propriété de continuité (4.26) entraîne alors (4.25) puisque

$$\|(\varphi, \text{grad } \varphi)\|_{W^{m-1,p}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+1})} \text{ est une norme équivalente à } \|\varphi\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)} .$$

Supposons donc la propriété (4.25) vérifiée à l'ordre $\mu \geq 0$, et soit $f \in W^{\mu+1,p}(\mathbb{R}^N)$. D'après (4.9) on a

$$(4.27) \quad \text{grad}(f \circ T) = \mathcal{L}[T'] \{(\text{grad } f) \circ T\}$$

Comme $\text{grad } f$ appartient à $W^{\mu,p}(\mathbb{R}^N)$ l'application $T \rightarrow (\text{grad } f) \circ T$ est continue de $\mathcal{V}^{\text{Sup}\{1,\mu\},\infty}$ à valeurs dans $W^{\mu,p}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, donc à fortiori de

$\mathcal{V}^{\mu+1,\infty}$ à valeurs dans $W^{\mu,p}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ en tout point $T \in \mathcal{C}^{\mu+1,\infty}$; de plus l'application $T \rightarrow \mathcal{L}[T']$ est affine continue de $\mathcal{V}^{\mu+1,\infty}$ dans $W^{\mu,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$; l'égalité (4.27) montre alors que l'application $T \rightarrow \text{grad}(f \circ T)$ est continue de $\mathcal{V}^{\mu+1,\infty}$ dans $W^{\mu,p}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ ce qui entraîne que la propriété (4.26), et donc la propriété (4.25), est vérifiée à l'ordre $\mu + 1$.

La propriété (4.25) a été établie pour l'ordre $m = 0$ au point 1), elle est donc démontrée par récurrence pour tout entier $m \geq 0$.

Démonstration de la partie ii) du lemme 4.4.

1) Le cas $m = 1, k = 1, \sigma = +\infty$.

Soient $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, $T \in \mathcal{C}^{1,\infty}$ et $\tau \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$. Pour tout point $x \in \mathbb{R}^N$ on a :

$$\begin{aligned} (f \circ (T + \tau))(x) - (f \circ T)(x) - \langle (\text{grad } f) \circ T(x), \tau(x) \rangle &= \\ = \int_0^1 \langle (\text{grad } f) \circ (T + h\tau)(x) - (\text{grad } f) \circ T(x), \tau(x) \rangle dh. \end{aligned}$$

En intégrant sur \mathbb{R}^N et en utilisant le théorème de Fubini, il vient :

$$\begin{aligned} \| f \circ (T + \tau) - f \circ T - \langle \text{grad } f \circ T, \tau \rangle \|_{L^p(\mathbb{R}^N)} &\leq \\ &\leq \sup_{0 \leq h \leq 1} \| (\text{grad } f) \circ (T + h\tau) - (\text{grad } f) \circ T \|_{L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} \| \tau \|_{L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} \end{aligned}$$

En majorant le second membre avec (4.24) on obtient, pour tout τ tel que

$\| \tau \|_1 \leq \eta(T)$ et pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$:

$$(4.28) \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{\| \tau \|_1} \| f \circ (T + \tau) - f \circ T - \langle \text{grad } f \circ T, \tau \rangle \|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \\ &\leq 3 (\| \det([T']^{-1}) \|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)})^{1/p} \left\{ \| (\text{grad } f) - \varphi \|_{L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} + \| \tau \|_0 \| [\varphi'] \|_{L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{2N})} \right\} \end{aligned} \right.$$

Par densité, cette majoration est encore vérifiée pour $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

En choisissant alors φ assez proche de $\text{grad } f$, puis en supposant τ assez petit dans $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, on peut rendre le second membre de (4.28) aussi petit que l'on veut, ce qui montre que si $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ l'application $T \rightarrow f \circ T$ est dérivable de $\mathcal{V}^{1,\infty}$ à valeurs dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ en tout point $T \in \mathcal{C}^{1,\infty}$, et que sa dérivée est donnée par (4.19).

2) Le cas général.

La démonstration est analogue à celle de la partie 2) du point i) et s'effectue par récurrence. On va en indiquer les principales étapes.

Il suffit de démontrer la dérivabilité pour $\sigma = +\infty, k = \sup\{1, m-1\}, m \geq 1$, c'est-à-dire :

$$(4.29) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } f \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \\ \text{l'application } T \rightarrow f \circ T \text{ est dérivable de } \mathcal{V}^{\text{Sup}\{1,m-1\},\infty} \text{ dans } W^{m-1,p}(\mathbb{R}^N) \\ \text{en tout point } T \in \mathcal{C}^{\text{Sup}\{1,m-1\},\infty}. \end{array} \right.$$

Les topologies de $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ et de $W^{l,p}(\mathbb{R}^N)$ étant compatibles, la dérivée sera alors donnée par (4.19).

On démontre d'abord que si $m \geq 2$, (4.29) est équivalent à

$$(4.30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } f \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \\ \text{l'application } T \rightarrow (f \circ T, \text{grad}(f \circ T)) \text{ est dérivable de } \mathcal{V}^{m-1,\infty} \\ \text{dans } W^{m-2,p}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+1}) \text{ en tout point } T \in \mathcal{C}^{m-1,\infty}. \end{array} \right.$$

Pour démontrer cette équivalence, on utilise le fait que l'on a au sens des distributions sur \mathbb{R}^N :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\text{grad}(f \circ T))}{\partial T}(T) \cdot \tau &= \lim_{h_n \rightarrow 0} \frac{1}{h_n} (\text{grad}(f \circ (T + h_n \tau)) - \text{grad}(f \circ T)) \\ &= \text{grad} \lim_{h_n \rightarrow 0} \frac{1}{h_n} (f \circ (T + h_n \tau) - f \circ T) \\ &= \text{grad} \left(\frac{\partial(f \circ T)}{\partial T}(T) \cdot \tau \right) \end{aligned}$$

En utilisant l'égalité (4.27) on montre que si (4.29) est vérifiée à l'ordre $\mu \geq 1$, (4.30), et donc (4.29), est vérifiée à l'ordre $\mu + 1$. La propriété (4.29) ayant été établie à l'ordre $m = 1$, elle est donc vraie pour tout $m \geq 1$.

Remarque 4.4.

Soit $f \in W^{l,p}(\mathbb{R}^N)$; en approchant f par des fonctions $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ et en passant à la limite dans la majoration (4.24) on obtient :

$$(4.31) \left\{ \begin{array}{l} \text{Etant donné } T \in \mathcal{C}^{1,\infty}, \text{ il existe } \eta(T) > 0 \text{ telle que} \\ \forall \tau \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N), \|\tau\|_1 \leq \eta(T), \quad \forall f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \text{ on a} \\ \|f \circ (T + \tau) - f \circ T\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq 3 \left(\|\det([T'])^{-1}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \right)^{1/p} \\ \quad \times \|\tau\|_0 \|\text{grad } f\|_{L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} \end{array} \right. \quad \blacksquare$$

4.1.4. Dérivation de l'application $T \rightarrow (f \circ T) |\det [T']|$ dans le cas où f est intégrable.

Nous allons dans ce paragraphe dériver l'application $T \rightarrow (f \circ T) |\det [T']|$ quand f est seulement dans $L^p(\mathbb{R}^N)$, résultat qui sera utilisé au chapitre 5.

Définition 4.1.

Soient $T \in \mathcal{C}^{1,\infty}$ et $1 < p, p' < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Etant donné $f \in W^{-1,p}(\mathbb{R}^N)$ on définit $(f \circ T) |\det [T']| \in W^{-1,p}(\mathbb{R}^N)$ par

$$(4.32) \left\{ \begin{array}{l} \langle\langle (f \circ T) |\det [T']|, \varphi \rangle\rangle_{W^{-1,p}, W^{1,p'}} = \langle\langle f, \varphi \circ T^{-1} \rangle\rangle_{W^{-1,p}, W^{1,p'}} \\ \forall \varphi \in W^{1,p'}(\mathbb{R}^N). \end{array} \right. \quad \blacksquare$$

L'égalité (4.32) définit bien un élément de $W^{-1,p}(\mathbb{R}^N)$ puisque l'application $\varphi \rightarrow \varphi \circ T^{-1}$ est linéaire continue de $W^{1,p'}(\mathbb{R}^N)$ dans lui-même d'après le lemme 4.1 complété par les majorations (4.10) et (4.11).

La notation est justifiée car, quand $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, on a

$$\langle\langle f, \varphi \circ T^{-1} \rangle\rangle_{W^{-1,p}, W^{1,p'}} = \int_{\mathbb{R}^N} f(\varphi \circ T^{-1}) = \int_{\mathbb{R}^N} (f \circ T) |\det [T']| \varphi$$

Nous pouvons maintenant énoncer le :

LEMME 4.5.

Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 < p < \infty$. L'application $T \rightarrow (f \circ T) |\det [T']|$, définie sur $\mathcal{C}^{1,\infty}$ à valeurs dans $L^p(\mathbb{R}^N)$, est dérivable de $\mathcal{C}^{1,\infty}$ dans $W^{-1,p}(\mathbb{R}^N)$ en tout point $T \in \mathcal{C}^{1,\infty}$. On a pour tout $\tau \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$

$$(4.33) \quad \frac{\partial \langle (f \circ T) |\det [T']| \rangle}{\partial T}(T) \cdot \tau = \{(\text{div}(f(\tau \circ T^{-1}))) \circ T\} |\det [T']| \quad \blacksquare$$

Remarque 4.5.

Etant donné Q un ouvert de \mathbb{R}^N l'application restriction, définie comme transposée de l'application prolongement par 0 de $W_0^{1,p}(Q)$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, est linéaire continue, donc dérivable, de $W^{-1,p}(\mathbb{R}^N)$ dans $W^{-1,p}(Q)$. Par composition avec cette application on obtient des résultats de dérivation de l'application $T \rightarrow ((f \circ T) | \det [T'] |)|_Q$.

Remarque 4.6.

On ne dérive pas ici l'application $T \rightarrow f \circ T$. Si cette application était dérivable on aurait, d'après le lemme 4.4. ii)

$$\frac{\partial (f \circ T)}{\partial T}(T) \cdot \tau = \langle \text{grad } f \rangle \circ T, \tau \rangle$$

qu'on sait définir par transposition, quand $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, seulement si $T \in \mathcal{C}^{2,\infty}$.

Démonstration du lemme 4.5.

1) Une majoration pour $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.

Si $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, les lemmes 4.2 et 4.4 ii) montrent que l'application $T \rightarrow (f \circ T) | \det [T'] |$ est dérivable de $\mathcal{V}^{1,\infty}$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ en tout point $T \in \mathcal{C}^{1,\infty}$, et que pour tout $\tau \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, on a :

$$(4.35) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial ((f \circ T) | \det [T'] |)}{\partial T}(T) \cdot \tau = \\ & = \langle \text{grad } f \rangle \circ T, \tau \rangle | \det [T'] | + \{ f \circ T \} (\text{div}(\tau \circ T^{-1})) \circ T | \det [T'] | \\ & = \{ \langle \text{grad } f, \tau \circ T^{-1} \rangle + f \text{ div}(\tau \circ T^{-1}) \} \circ T | \det [T'] | \\ & = \{ \text{div}(f \circ (\tau \circ T^{-1})) \} \circ T | \det [T'] | \end{aligned} \right.$$

D'autre part, d'après (4.9)

$$\{ \text{div}(f \circ (\tau \circ T^{-1})) \} \circ T = \sum_{i,j} ({}^t [T']^{-1})_{i,j} \frac{\partial ((f \circ T) \tau_i)}{\partial x_j}$$

de sorte qu'en raison des lemmes 4.2, 4.3 et 4.4 i) l'application qui à T associe le second membre de (4.35) est continue de $\mathcal{V}^{1,\infty}$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ en tout point $T \in \mathcal{C}^{1,\infty}$.

Donnons nous $T \in \mathcal{C}^{1,\infty}$, le lemme 2.4 ii) montre que si τ est assez proche de 0 dans $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, $T + h\tau$ appartient à $\mathcal{C}^{1,\infty}$ pour tout $h \in [0,1]$. Le résultat ci-dessus montre alors que la fonction γ définie sur $[0,1]$ par

$$\gamma(h) = \{f \circ (T + h\tau)\} |\det[(T + h\tau)']|$$

est continument dérivable de $[0,1]$ à valeurs dans $L^P(\mathbb{R}^N)$ et que

$$(4.36) \quad \gamma'(h) = \left\{ \left\{ \operatorname{div}(f \circ (\tau \circ (T + h\tau)^{-1})) \right\} \circ (T + h\tau) \right\} |\det[(T + h\tau)']|$$

Notons

$$(4.37) \quad \begin{cases} X(f, T, \tau) = \{f \circ (T + \tau)\} |\det[(T + \tau)']| - \{f \circ T\} |\det[T']| \\ \quad - \left\{ \operatorname{div}(f \circ (\tau \circ T^{-1})) \right\} \circ T \right\} |\det[T']|. \end{cases}$$

La fonction $X(f, T, \tau)$ appartient à $L^P(\mathbb{R}^N)$ et l'on a

$$\begin{aligned} X(f, T, \tau) &= \gamma(1) - \gamma(0) - \gamma'(0) \\ &= \int_0^1 (\gamma'(h) - \gamma'(0)) dh \end{aligned}$$

d'où

$$(4.38) \quad \|X(f, T, \tau)\|_{W^{-1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq \sup_{0 \leq h \leq 1} \|\gamma'(h) - \gamma'(0)\|_{W^{-1,p}(\mathbb{R}^N)}.$$

Majoration du second membre de (4.38).

Soit $\phi \in W^{1,p'}(\mathbb{R}^N)$. On a puisque $\gamma'(h) \in L^P(\mathbb{R}^N)$

$$\begin{aligned} \langle \gamma'(h), \phi \rangle_{W^{-1,p}, W^{1,p'}} &= \int_{\mathbb{R}^N} \gamma'(h) \phi = \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left\{ \operatorname{div}(f \circ (\tau \circ (T + h\tau)^{-1})) \right\} \circ (T + h\tau) \left\{ |\det[(T + h\tau)']| \right\} \phi \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $(T + h\tau)^{-1}$, puis en intégrant par parties, et enfin en effectuant le changement de variable $I + h\tau \circ T^{-1}$, il vient grâce aux égalités (4.8) et (4.9):

$$\begin{aligned}
 \langle\langle \gamma'(h), \phi \rangle\rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} \{ \operatorname{div}(f(\tau \circ (T + h\tau)^{-1})) \} \{ \phi \circ (T + h\tau)^{-1} \} \\
 &= - \int_{\mathbb{R}^N} f \langle \tau \circ (T + h\tau)^{-1}, \operatorname{grad}(\phi \circ (T + h\tau)^{-1}) \rangle \\
 &= - \int_{\mathbb{R}^N} \{ f \circ (I + h\tau \circ T^{-1}) \} \{ |\det[(I + h\tau \circ T^{-1})']| \} \times \\
 &\quad \times \langle \tau \circ T^{-1}, [(I + h\tau \circ T^{-1})']^{-1} \operatorname{grad}(\phi \circ T^{-1}) \rangle
 \end{aligned}$$

ce qui permet d'établir la majoration :

$$\begin{aligned}
 | \langle\langle \gamma'(h) - \gamma'(0), \phi \rangle\rangle | &\leq \| \tau \circ T^{-1} \|_{L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} \| \operatorname{grad}(\phi \circ T^{-1}) \|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} \times \\
 &\times \left\{ \| f \circ (I + h\tau \circ T^{-1}) \|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \| \det[(I + h\tau \circ T^{-1})'] \|_{L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} \| [(I + h\tau \circ T^{-1})']^{-1} \|_{L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{2N})} + \right. \\
 &\quad \left. + \| f \|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \| \det[(I + h\tau \circ T^{-1})'] \| [(I + h\tau \circ T^{-1})']^{-1} - [I] \|_{L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{2N})} \right\}
 \end{aligned}$$

En complétant cette majoration par :

$$\| \tau \circ T^{-1} \|_{L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} = \| \tau \|_0 \leq \| \tau \|_1$$

et par les majorations (4.11) et (4.24), et en utilisant la continuité des applications $T \rightarrow \det[T']$ et $T \rightarrow [T']^{-1}$ (lemmes 4.2 et 4.3), peut alors majorer le second membre de (4.38), ce qui donne :

$$\forall \tau \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N), \| \tau \|_1 \leq \eta(T) \text{ et } \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N),$$

$$(4.39) \quad \left\{ \begin{aligned}
 &\| X(f, T, \tau) \|_{W^{-1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq \\
 &\leq \| \tau \|_1 C(T) \left\{ \| f - \varphi \|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \| \tau \|_0 \| \operatorname{grad} \varphi \|_{L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} \right. \\
 &\quad \left. + \| f \|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \left\{ \sup_{0 \leq h \leq 1} \| \det[(I + h\tau \circ T^{-1})'] \| [(I + h\tau \circ T^{-1})']^{-1} - [I] \|_{L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{2N})} \right\} \right\}
 \end{aligned} \right.$$

2) Démonstration de la dérivabilité.

Par densité, la majoration (4.39) est encore vérifiée pour $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$.

En choisissant φ assez proche de f , puis en supposant τ assez petit, on peut,

en utilisant les propriétés de continuité résultant des lemmes 4.2 et 4.3,

rendre $\frac{1}{\|\tau\|_1} \|X(f, T, \tau)\|_{W^{-1, p}(\mathbb{R}^N)}$ aussi petit que l'on veut. Ceci établit

le résultat de dérivation annoncé, en raison de la définition (4.37) de $X(f, T, \tau)$.

4.1.5. Dérivation de l'application $T \rightarrow (\phi(T)) \circ T^{-1}$.

Nous allons, dans ce paragraphe, étendre le lemme de dérivation 4.4. ii) dans le cas où la fonction que l'on transporte par T dépend de T .

LEMME 4.6.

Soient m et k deux entiers tels que $m \geq 1$, $k \geq m$ et $1 \leq p < +\infty$, $\sigma = \infty$ ou \bar{c} . Soit ϕ une fonction définie sur $\mathcal{C}^{k, \sigma}$, à valeurs dans $W^{m, p}(\mathbb{R}^N)$, vérifiant :

$$(4.40) \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi \text{ est dérivable de } \mathcal{V}^{k, \sigma} \text{ à valeurs dans } W^{m, p}(\mathbb{R}^N) \text{ en un point} \\ T_0 \in \mathcal{C}^{k, \sigma}. \end{array} \right.$$

Alors l'application $T \rightarrow (\phi(T)) \circ T^{-1}$ est dérivable de $\mathcal{V}^{k, \sigma}$ à valeurs dans $W^{m-1, p}(\mathbb{R}^N)$ au point T_0 , et l'on a, pour tout $\tau \in W^{k, \sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$:

$$(4.41) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial((\phi(T)) \circ T^{-1})}{\partial T}(T_0) \cdot \tau = \\ = \left(\frac{\partial \phi}{\partial T}(T_0) \cdot \tau \right) \circ T_0^{-1} + \langle \text{grad}((\phi(T_0)) \circ T_0^{-1}), \tau \circ T_0^{-1} \rangle \end{array} \right.$$

Démonstration du lemme 4.6.

1) Le cas $m = 1$

On se donne donc $k \geq 1$ et $\sigma = \infty$ ou \bar{c} ; si τ est assez petit dans $W^{k, \sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, $T_0 + \tau$ appartient à $\mathcal{C}^{k, \sigma}$ d'après le lemme 2.4, et on pose :

$$(4.42) \quad \left\{ \begin{array}{l} X(\tau) = (\phi(T_0 + \tau)) \circ (T_0 + \tau)^{-1} - (\phi(T_0)) \circ T_0^{-1} \\ - \left(\frac{\partial \phi}{\partial T}(T_0) \cdot \tau \right) \circ T_0^{-1} + \langle \text{grad}((\phi(T_0)) \circ T_0^{-1}), \tau \circ T_0^{-1} \rangle \end{array} \right.$$

La majoration (4.10) relative à $f = X(\tau)$ et à $T = T_0 + \tau$, complétée par la continuité de $T \rightarrow \|\det[T']\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$ montre que si $\|\tau\|_k$ est assez petit,

$$(4.43) \quad \|X(\tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq 2 \left(\|\det[T']\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \right)^{1/p} \|(X(\tau)) \circ (T_0 + \tau)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$$

En notant

$$(\phi(T_0)) \circ T_0^{-1} = f$$

on peut écrire :

$$(4.44) \quad \left\{ \begin{aligned} & (X(\tau)) \circ (T_0 + \tau) = \\ & = \phi(T_0 + \tau) - f \circ (T_0 + \tau) - \left(\frac{\partial \phi}{\partial T}(T_0) \cdot \tau \right) \circ T_0^{-1} \circ (T_0 + \tau) + \langle \text{grad } f, \tau \circ T_0^{-1} \rangle \circ (T_0 + \tau) \\ & = \phi(T_0 + \tau) - \phi(T_0) - \frac{\partial \phi}{\partial T}(T_0) \cdot \tau \\ & \quad - f \circ (T_0 + \tau) + f \circ T_0 + \langle \text{grad } f \rangle \circ T_0, \tau \rangle \\ & \quad - \left(\frac{\partial \phi}{\partial T}(T_0) \cdot \tau \right) \circ T_0^{-1} \circ (T_0 + \tau) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial T}(T_0) \cdot \tau \right) \circ T_0^{-1} \circ T_0 \\ & \quad + \langle \text{grad } f \rangle \circ (T_0 + \tau) - \langle \text{grad } f \rangle \circ T_0, \tau \circ T_0^{-1} \circ (T_0 + \tau) \rangle \\ & \quad + \langle \text{grad } f \rangle \circ T_0, \tau \circ T_0^{-1} \circ (T_0 + \tau) - \tau \circ T_0^{-1} \circ T_0 \rangle \end{aligned} \right.$$

Nous allons estimer le second membre de (4.44). D'après l'hypothèse de dérivabilité faite sur ϕ , on a :

$$(4.45) \quad \frac{1}{\|\tau\|_k} \|\phi(T_0 + \tau) - \phi(T_0) - \frac{\partial \phi}{\partial T}(T_0) \cdot \tau\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \rightarrow 0 \text{ quand } \|\tau\|_k \rightarrow 0.$$

La fonction f appartenant à $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, on a d'après le lemme de dérivation 4.4 ii) :

$$(4.46) \quad \frac{1}{\|\tau\|_k} \|f \circ (T_0 + \tau) - f \circ T_0 - \langle \text{grad } f \rangle \circ T_0, \tau \rangle\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \rightarrow 0 \text{ quand } \|\tau\|_k \rightarrow 0.$$

En utilisant (4.31) et (4.11) on majore, pour $\|\tau\|_k \leq \eta(T_0)$

$$(4.47) \left\{ \begin{array}{l} \left\| \left(\frac{\partial \phi}{\partial T}(T_0) \cdot \tau \right) \cdot T_0^{-1} \cdot (T_0 + \tau) - \left(\frac{\partial \phi}{\partial T}(T_0) \cdot \tau \right) \cdot T_0^{-1} \cdot T_0 \right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \\ \leq 3 \left(\left\| \det([T_0']^{-1}) \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \right)^{1/p} \|\tau\|_0 \\ \times \left\| [T_0']^{-1} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{2N})} \left(\left\| \det[T_0'] \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \right)^{1/p} \left\| \text{grad} \left(\frac{\partial \phi}{\partial T}(T_0) \cdot \tau \right) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\ \leq c_1(T_0) \left\| \frac{\partial \phi}{\partial T}(T_0) \cdot \tau \right\|_{\mathcal{L}_c(W^{k, \sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N); W^{1, p}(\mathbb{R}^N))} \|\tau\|_k^2 \end{array} \right.$$

Comme $\text{grad } f$ appartient à $L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, le lemme de continuité 4.4 i)

montre que

$$(4.48) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\|\tau\|_k} \left\| \langle \text{grad } f \rangle \cdot (T_0 + \tau) - \langle \text{grad } f \rangle \cdot T_0, \tau \cdot T_0^{-1} \cdot (T_0 + \tau) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\ \leq \left\| \langle \text{grad } f \rangle \cdot (T_0 + \tau) - \langle \text{grad } f \rangle \cdot T_0 \right\|_{L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} \rightarrow 0 \quad \text{quand } \|\tau\|_k \rightarrow 0. \end{array} \right.$$

Enfin, le lemme 2.2 v) permet de majorer :

$$(4.49) \left\{ \begin{array}{l} \left\| \langle \text{grad } f \rangle \cdot T_0, \tau \cdot T_0^{-1} \cdot (T_0 + \tau) - \tau \cdot T_0^{-1} \cdot T_0 \right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \\ \leq \left\| \langle \text{grad } f \rangle \cdot T_0 \right\|_{L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} \left\| \tau \cdot T_0^{-1} \cdot (T_0 + \tau) - \tau \cdot T_0^{-1} \cdot T_0 \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} \\ \leq \left\| \langle \text{grad } f \rangle \cdot T_0 \right\|_{L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} \gamma_0 \|\tau \cdot T_0^{-1}\|_1 \|\tau\|_0 \leq c_2(T_0) \|\tau\|_k^2 \end{array} \right.$$

Les résultats (4.45) à (4.49) permettent d'estimer la norme dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ du second membre de (4.44), et avec (4.43), il vient :

$$\frac{1}{\|\tau\|_k} \left\| X(\tau) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \rightarrow 0 \quad \text{quand } \|\tau\|_k \rightarrow 0,$$

ce qui compte tenu de la définition (4.42) de $X(\tau)$, démontre le lemme pour

$m = 1$.

2) Le cas $m > 1$.

La démonstration est analogue à celle de la partie 2) de la démonstration du point ii) du lemme 4.4., et s'effectue par récurrence. On va en indiquer les principales étapes.

Notons tout d'abord qu'il suffit de démontrer que

$$(4.50) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{L'application } T \rightarrow (\phi(T)) \circ T^{-1} \text{ est dérivable de } \mathcal{V}^{k,\sigma} \text{ dans} \\ W^{m-1,p}(\mathbb{R}^N) \text{ au point } T_0; \end{array} \right.$$

Les topologies de $W^{m-1,p}(\mathbb{R}^N)$ étant compatibles, la dérivée sera alors donnée par (4.41).

On montre ensuite que, quand $m \geq 2$, (4.50) est équivalent à :

$$(4.51) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{L'application } T \rightarrow \{(\phi(T)) \circ T^{-1}, \text{grad}((\phi(T)) \circ T^{-1})\} \text{ est dérivable} \\ \text{de } \mathcal{V}^{k,\sigma} \text{ dans } W^{m-2,p}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{N+1}) \text{ au point } T_0, \end{array} \right.$$

puis on remarque que, d'après (4.9), on a

$$(4.52) \quad \text{grad}((\phi(T)) \circ T^{-1}) = ([T']^{-1} \text{grad } \phi(T)) \circ T^{-1}.$$

Supposons le lemme 4.6 vérifié pour un ordre $\mu > 1$, et soit ϕ une fonction vérifiant l'hypothèse (4.40) à l'ordre $\mu + 1$. En utilisant l'égalité (4.52) et le lemme 4.3, on montre que la fonction ϕ vérifie la propriété (4.51), et donc (4.50), à l'ordre $\mu + 1$, ce qui établit le lemme pour l'ordre $\mu + 1$.

Le lemme ayant été démontré pour l'ordre $\mu = 1$, ce raisonnement de récurrence le démontre pour tout $m > 1$.

■

4.2. DERIVATION D'UNE INTEGRALE PAR RAPPORT A SON DOMAINE D'INTEGRATION.

4.2.1. Cas général.

Nous allons nous intéresser à la dérivabilité de la fonctionnelle définie sur $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ par

$$(4.53) \quad J(D) = \int_D \phi(D) \, dx$$

où ϕ est définie sur $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$, où $k \geq 1$ et $\sigma = \infty$ ou \bar{c} , et telle que $\phi(D) \in L^1(D)$.

Rappelons que si θ est assez proche de zéro dans $W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, alors $I + \theta \in \mathcal{G}^{k,\sigma}$ et D étant fixé, $(I + \theta)(D) \in \mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$; on définit le transporté ϕ_D de ϕ sur D par

$$(4.54) \quad \bar{\phi}_D(\theta) = \phi((I + \theta)(D)) \circ (I + \theta)$$

qui appartient à $L^1(D)$ d'après le lemme 4.1 de changement de variable. Notons que $\bar{\phi}_D(0) = \phi(D)$.

THEOREME 4.1.

Soit $D_0 \in \mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ où $k \geq 1$, $\sigma = \infty$ ou \bar{c} et où Q est un ouvert de \mathbb{R}^N .

Si l'application $\bar{\phi}_D$ définie par (4.54) est dérivable de $W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ à valeurs dans $L^1(D_0)$ au point 0, alors l'application J définie par (4.40) est dérivable de $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ dans \mathbb{R} au point D_0 et l'on a, pour tout $\tau \in W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$:

$$(4.55) \quad \frac{\partial J}{\partial D}(D_0) \cdot \tau = \int_{D_0} (\phi(D_0) \operatorname{div} \tau + \frac{\partial \bar{\phi}_D}{\partial \theta}(0) \cdot \tau) \, dx$$

Démonstration du théorème 4.1.

Il s'agit d'après la définition 3.1. de la dérivation, d'établir la dérivabilité de l'application $J_{D_0}^*$ définie sur un voisinage de 0 de $W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ par

$$J_{D_0}^*(\theta) = J((I + \theta)(D_0)) = \int_{(I + \theta)(D_0)} \phi((I + \theta)(D_0)) \, dx$$

Le lemme 4.1 de changement de variable donne, avec (4.54),

$$(4.56) \quad J_{D_0}^*(\theta) = \int_{D_0} \bar{\phi}_{D_0}(\theta) |\det[(I + \theta)']| dx$$

L'hypothèse de dérivabilité de $\bar{\phi}_{D_0}$ jointe au lemme 4.2 de dérivation du

déterminant montre alors que $J_{D_0}^*$ est dérivable de $W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ à valeurs dans

\mathbb{R} au point 0 et que pour tout $\tau \in W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$:

$$\frac{\partial J_{D_0}^*}{\partial \theta}(0) \cdot \tau = \int_{D_0} (\phi(D_0) \operatorname{div} \tau + \frac{\partial \bar{\phi}_{D_0}}{\partial \theta}(0) \cdot \tau) dx$$

ce qui établit le théorème 4.1.

4.2.2. Cas où la fonction intégrée ne dépend pas du domaine.

Nous allons considérer le cas où $\phi(D)$ est la restriction à D d'une fonction f donnée dans \mathbb{R}^N , c'est à dire le cas où :

$$(4.57) \quad J(D) = \int_D f dx$$

THEOREME 4.2.

Soient Q un ouvert de \mathbb{R}^N , $k > 1$, $\sigma = \infty$ ou \bar{c} et $f \in W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$.

i) La fonction J définie par (4.57) est dérivable de $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ à

valeurs dans \mathbb{R} en tout point D et on a, pour tout $\tau \in W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$:

$$(4.58) \quad \frac{\partial J}{\partial D}(D) \cdot \tau = \int_D \operatorname{div}(f \tau) dx$$

ii) Si de plus D est borné et localement graphe lipschitzien on a pour tout $\tau \in W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$:

$$(4.59) \quad \frac{\partial J}{\partial \bar{E}}(D) \cdot \tau = \int_{\partial D} \langle n, \tau \rangle f ds$$

où n est la normale extérieure à ∂D .

Remarque 4.7.

L'expression (4.59) de la dérivée de J permet de déterminer explicitement les directions τ de descente, pour la définition desquelles on renvoie à CEA [1], alors que (4.58) ne le permet pas.

Notons qu'on savait a priori, d'après le théorème 3.1, que $\frac{\partial J}{\partial D}(D) \cdot \tau$ ne dépend de τ que par sa trace normale $\langle n, \tau \rangle$ si D est de classe C^1 et $\sigma = \bar{c}$, mais cela ne suffit pas pour expliciter les directions de descente.

Démonstration du théorème 4.2.

Nous allons appliquer le théorème 4.1. On a ici

$$\bar{\phi}_D(\theta) = f|_{(I + \theta)(D)} \circ (I + \theta) = f \circ (I + \theta)|_D ;$$

le lemme de dérivation 4.4. ii) complété par la remarque 4.2. i) montre que $\bar{\phi}_D$ est dérivable de $W^{k, \sigma}(R^N, R^N)$ à valeurs dans $L^1(D)$ au point 0 avec pour tout $\tau \in W^{k, \sigma}(R^N, R^N)$

$$\frac{\partial \bar{\phi}_D}{\partial \theta}(0) \cdot \tau = \langle \text{grad } f, \tau \rangle|_D$$

et le théorème 4.1. montre alors que la partie i) du théorème est vérifiée. Quand est borné et localement graphe lipschitzien il est loisible d'appliquer la formule de Green dans (4.58), ce qui établit (4.59).

4.3. GENERALITES SUR L'INTEGRALE SUPERFICIELLE.4.3.1. Définition de l'intégrale superficielle.

Rappelons la définition donnée dans NECAS [1].

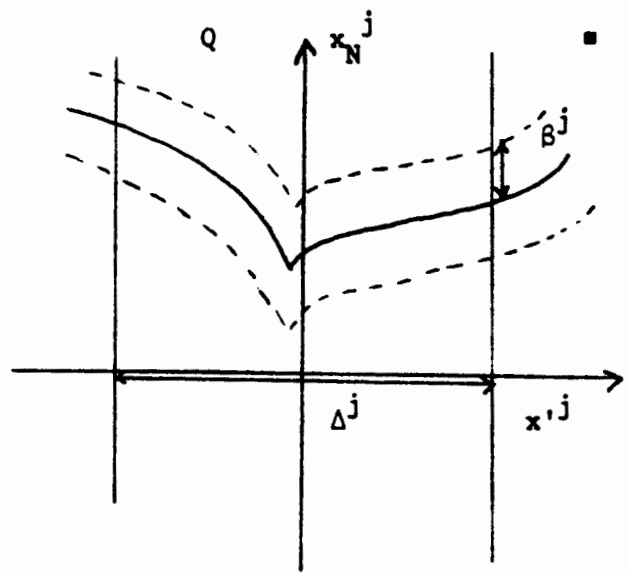
DEFINITION 4.2.

Soit Q un ouvert borné de R^N localement graphe lipschitzien. On dit que $f \in L^1(\partial Q)$ si $f(x^j, \psi^j(x^j)) \in L^1(\Delta^j)$, et on définit son intégrale superficielle par :

$$(4.60) \quad \int_{\partial Q} f \, ds = \sum_{j=1}^m \int_{\Delta^j} f(x'^j, \psi^j(x'^j)) \alpha^j(x'^j, \psi^j(x'^j)) \times \\ \times \left(1 + \sum_{i=1}^{N-1} \left| \frac{\partial \psi^j}{\partial x_i^j} \right|^2 \right)^{1/2} dx'^j$$

où la frontière ∂Q est représentée sur le pavé Δ^j , dans le système d'axes (x'^j, x_N^j) par $x_N^j = \psi^j(x'^j)$, et où α^j est une partition de l'unité subordonnée au recouvrement de ∂Q par les $\Delta^j \times]\psi^j - \beta^j, \psi^j + \beta^j[$, ces ouverts étant en nombre fini (égal à m) puisque ∂Q est compact.

On montre que cette définition ne dépend pas du système de représentation $\{x'^j, x_N^j, \Delta^j, \psi^j, \beta^j\}$ ni de la partition de l'unité α^j .



On peut prolonger ψ^j en dehors de Δ^j en une fonction de $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^{N-1}_{x'^j})$ qu'on notera encore ψ^j . On définit alors une bijection de \mathbb{R}^N , $\hat{\psi}^j \in \mathcal{C}^{1,\infty}$, par

$$(4.61) \quad \hat{\psi}^j(x'^j, x_N^j) = (x'^j, x_N^j + \psi^j(x'^j))$$

Avec ces notations on peut écrire l'intégrale superficielle sous la forme

$$(4.62) \quad \int_{\partial Q} f \, ds = \sum_{j=1}^m \int_{\Delta^j} \{ (f \alpha^j) \circ \hat{\psi}^j \} | \text{grad}(\hat{\psi}^j)_N |_{\mathbb{R}^N} dx'^j$$

4.3.2. Changement de variable dans une intégrale superficielle.

LEMME 4.7.

Soit Q un ouvert borné de \mathbb{R}^N , localement graphe lipschitzien, et soient $T \in \mathcal{C}^1, \bar{c}$ et $f \in L^1(\partial(T(Q)))$.

Alors $f \circ T \in L^1(\partial Q)$ et

$$(4.63) \quad \int_{\partial(T(Q))} f \, ds = \int_{\partial Q} (f \circ T) |\det[T']| \left| [T']^{-1} n \right|_{\mathbb{R}^N} ds$$

où n est la norme extérieure à ∂Q .

Notons que si T appartenait seulement à \mathcal{C}^1, ∞ , on ne saurait pas définir les fonctions intégrables sur $\partial(T(Q))$ puisque $T(Q)$ ne serait pas nécessairement localement graphe lipschitzien.

Démonstration du lemme 4.7.

i) Localisation

Soit y_0 un point de ∂Q , il existe un système d'axes (y', y_N) d'origine y_0 et une fonction φ lipschitzienne tels que dans un voisinage cylindrique $\mathcal{V} = \{(y', y_N) \mid y' \in \mathcal{V}', \text{voisinage de } 0 \text{ dans } \mathbb{R}^{N-1}, |y_N| < \varepsilon\}$ de y_0 , ∂Q soit représenté par $y_N = \varphi(y')$.

De même puisque $T(Q)$ est localement graphe lipschitzien, il existe un système d'axes (x', x_N) d'origine $x_0 = T(y_0)$ et une fonction ψ lipschitzienne tels que dans un voisinage cylindrique \mathcal{W} de x_0 , $\partial(T(Q))$ soit représenté par $x_N = \psi(x')$.

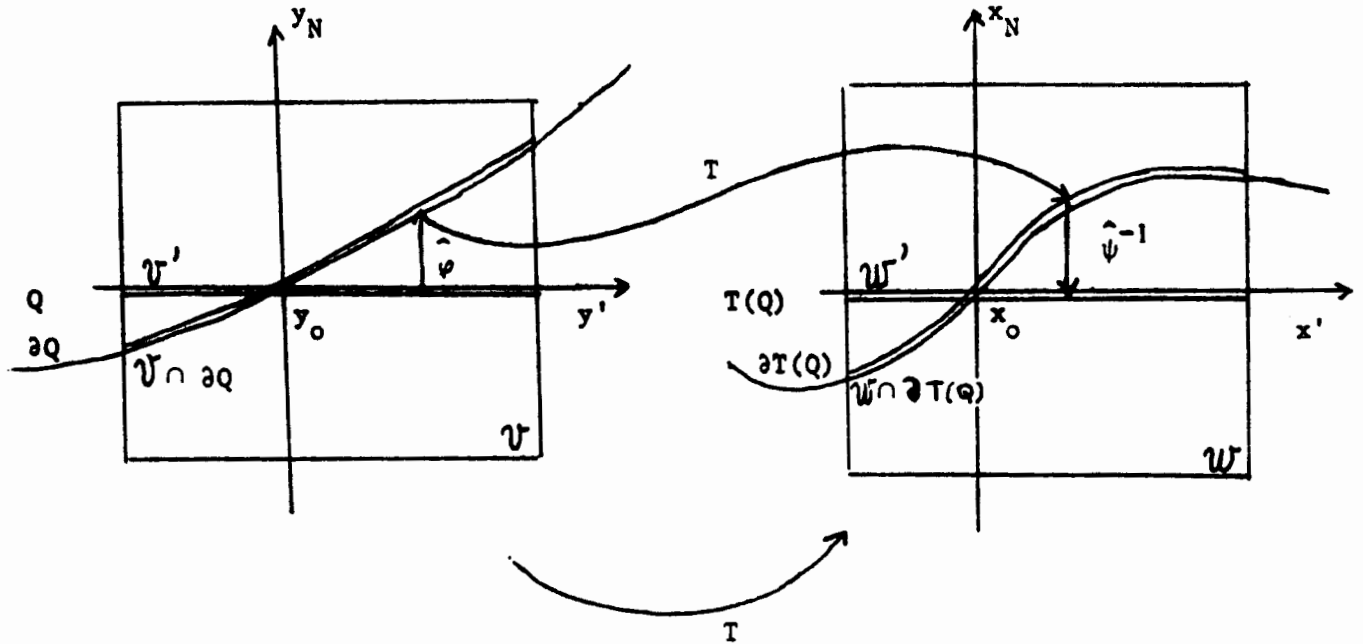
On suppose enfin, ce qui est toujours possible, que ⁽¹⁾

$$(4.64) \quad T(\mathcal{V} \cap \partial Q) = \mathcal{W} \cap \partial T(Q)$$

(1) Il suffit de considérer $\partial Q \cap \mathcal{V} \cap T^{-1}(\mathcal{W})$ et $T(\partial Q) \cap T(\mathcal{V}) \cap \mathcal{W}$ et de construire les voisinages cylindriques correspondants.

En définissant $\hat{\psi} \in \mathcal{C}^{1,\infty}$ par (4.61) et $\hat{\varphi}$ de façon analogue on a

$$(4.65) \quad \hat{\varphi}(\mathcal{V}') = \mathcal{V} \cap \partial Q, \quad \hat{\psi}(\mathcal{W}') = \mathcal{W} \cap \partial T(Q)$$



Admettons un instant que

$$(4.66) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{si } g \in L^1(\mathcal{W} \cap \partial T(Q)), \text{ alors } g \circ T \in L^1(\mathcal{V} \cap \partial Q) \text{ et} \\ \int_{\mathcal{W}'} \{g \circ \hat{\psi}\} |\text{grad}(\hat{\psi}_N)|_{\mathbb{R}^N} dx' = \\ = \int_{\mathcal{V}'} \{g \circ T \circ \hat{\varphi}\} \{|\det[T']| |{}^t[T']^{-1}n|_{\mathbb{R}^N} \circ \hat{\varphi}\} |\text{grad}(\hat{\varphi}_N)|_{\mathbb{R}^N} dy' \end{array} \right.$$

En considérant un recouvrement fini de ∂Q par des cylindres \mathcal{V}_j

(ce qui est possible puisque ∂Q est compact), en posant $g^j = f \alpha^j$ où α^j est une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement, et en additionnant les égalités (4.66) relatives à \mathcal{V}_j, g^j on obtient alors que $g \circ T \in L^1(\partial Q)$ et l'égalité (4.63) exprimée avec la formulation (4.62) de l'intégrale superficielle.

ii) Démonstration de (4.66).

On définit une bijection \hat{S} de R_y^N dans R_x^N par :

$$(4.67) \quad \hat{S} = \hat{\psi}^{-1} \circ T \circ \hat{\varphi} .$$

D'après la définition (4.61) $\hat{\varphi}, \hat{\psi} \in \mathcal{C}^{1,\infty}$, donc $\hat{S} \in \mathcal{C}^{1,\infty}$; soit S la restriction de \hat{S} à \mathcal{V}' , il en résulte avec (4.64) et (4.65) que :

(4.68) S est une bijection de \mathcal{V}' sur \mathcal{W}' lipschitzienne ainsi que son inverse.

Le lemme 4.1 relatif au changement de variable S (en dimension $N-1$) montre donc que

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } g \circ \hat{\psi} \in L^1(\mathcal{W}') , \text{ alors } g \circ T \circ \hat{\varphi} \in L^1(\mathcal{V}') \quad \text{et} \\ \int_{\mathcal{W}'} \{ g \circ \hat{\psi} \} |\text{grad } \hat{\psi}_N|_{R^N} dx' = \\ = \int_{\mathcal{V}'} \{ g \circ T \circ \hat{\varphi} \} \{ (|\text{grad } \hat{\psi}_N|_{R^N}) \circ \hat{\psi}^{-1} \circ T \circ \hat{\varphi} \} |\det [S']| dy' \end{array} \right.$$

Pour établir (4.66) il ne reste donc plus qu'à montrer que p.p. dans \mathcal{V}'

$$(4.69) \quad \left\{ \begin{array}{l} \{ (|\text{grad } \hat{\psi}_N|_{R^N}) \circ \hat{\psi}^{-1} \circ T \circ \hat{\varphi} \} |\det[S']| = \\ = |\text{grad } \hat{\varphi}_N|_{R^N} \{ (|{}^t[T']^{-1} n|_{R^N}) \circ \hat{\varphi} \} (|\det[T']|) \circ \hat{\varphi} \end{array} \right.$$

iii) Démonstration de (4.69)

En raison de la définition (4.61) les applications $\hat{\varphi}$ et $\hat{\psi}^{-1}$ sont différentiables respectivement en tout point de $R_y^N - \{Z_\varphi \times R_{y_N}\}$ et de $R_x^N - \{Z_\psi \times R_{x_N}\}$ où Z_φ et Z_ψ sont des sous-ensembles de mesure nulle respectivement de $R_{y'}^{N-1}$ et $R_{x'}^{N-1}$.

Il en résulte que $\hat{\varphi}$ est différentiable en tout point de $\mathcal{V}' - Z_\varphi$, et que $\hat{\psi}^{-1}$ est différentiable en tout point de $\mathcal{W}' \cap (\partial(T(Q)) - \hat{\psi}(Z_\psi))$; comme de

plus T est différentiable en tout point de \mathbb{R}^N , donc de $\mathcal{V} \cap \partial Q$, cela entraîne avec (4.65) que $\hat{\psi}^{-1} \circ T \circ \hat{\varphi}$ est différentiable en tout point de

$$\mathcal{V}' = \{z_\varphi \cup (T \circ \hat{\varphi})^{-1}(\hat{\psi}(z_\psi))\} = \mathcal{V}' = \{z_\varphi \cup \hat{S}^{-1}(z_\psi)\}.$$

Or $\mathcal{V}' \cap \hat{S}^{-1}(z_\psi) = S^{-1}(\mathcal{W}' \cap z_\psi)$, et le lemme de Vitali montre d'après

(4.68) que cet ensemble est de mesure nulle dans $\mathbb{R}_{y'}^{N-1}$.

Cela établit que $S = \hat{\psi}^{-1} \circ T \circ \hat{\varphi}$ est différentiable presque partout dans \mathcal{V}' , et on a

$$(4.69)\text{bis } [\hat{S}'] = \{[(\hat{\psi}^{-1})'] \circ T \circ \hat{\varphi}\} \{[T'] \circ \hat{\varphi}\} [\hat{\varphi}'] \quad \text{p.p. dans } \mathcal{V}'$$

Or

$$[\hat{\varphi}'] = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \circ \\ & & \circ & & \\ & & & \ddots & \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \varphi}{\partial y_{N-1}} & & 1 \end{bmatrix} \quad [(\hat{\psi}^{-1})'] = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \circ \\ & & \circ & & \\ & & & \ddots & \\ -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} & \dots & -\frac{\partial \psi}{\partial x_{N-1}} & & 1 \end{bmatrix}$$

ce qui entraîne $\det [\hat{\varphi}'] = \det [(\hat{\psi}^{-1})'] = 1$, donc

$$(4.70) \quad \det [\hat{S}'] = (\det [T']) \circ \varphi \quad \text{p.p. dans } \mathcal{V}'.$$

D'autre part en tout point de \mathcal{V}' où \hat{S} (application de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R}^N) est différentiable, sa restriction S (application de \mathbb{R}^{N-1} dans \mathbb{R}^{N-1}) l'est également et on a :

$$[\hat{S}'] = \begin{bmatrix} & & & & \frac{\partial \hat{S}_1}{\partial y_N} \\ & & & & \vdots \\ & & & & \vdots \\ [S'] & & & & \vdots \\ & & & & \vdots \\ \frac{\partial \hat{S}_N}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial \hat{S}_N}{\partial y_{N-1}} & & \frac{\partial \hat{S}_N}{\partial y_N} \end{bmatrix} \quad \text{p.p. dans } \mathcal{V}'$$

Or il résulte de (4.68) que $\hat{S}_N(y', 0) = 0$, $\forall y' \in \mathcal{V}'$, donc

$$(4.71) \quad \frac{\partial \hat{S}_N}{\partial y_i} = 0, \quad i = 1, \dots, N-1 \quad \text{p.p. dans } \mathcal{V}'$$

et en développant le déterminant de $[\hat{S}']$ par rapport à sa dernière ligne il vient

$$(4.72) \quad \det [\hat{S}'] = \det [S'] \frac{\partial \hat{S}_N}{\partial y_N} \quad \text{p.p. dans } \mathcal{V}'$$

et avec (4.70) on obtient finalement

$$(4.73) \quad (\det [T']) \circ \hat{\varphi} = \det [S'] \frac{\partial \hat{S}_N}{\partial y_N} \quad \text{p.p. dans } \mathcal{V}'$$

Calculons maintenant $\frac{\partial \hat{S}_N}{\partial y_N}$; d'après (4.69 bis) on a

$$\frac{\partial \hat{S}_N}{\partial y_i} = \sum_{k=1}^N \left\{ \frac{\partial (\hat{\psi}^{-1})_N}{\partial x_k} \circ T \circ \hat{\varphi} \right\} \frac{\partial (T \circ \hat{\varphi})_k}{\partial y_i} \quad \text{p.p. dans } \mathcal{V}' ;$$

en notant $[M]_k$ le k-ième vecteur colonne d'une matrice $[M]$ on a alors

$$(4.74) \quad \frac{\partial \hat{S}_N}{\partial y_N} = \langle (\text{grad}(\hat{\psi}^{-1})_N) \circ T \circ \hat{\varphi}, [(T \circ \hat{\varphi})']_N \rangle \quad \text{p.p. dans } \mathcal{V}' ;$$

or compte tenu de (4.71) on a presque partout dans \mathcal{V}'

$$\langle (\text{grad}(\hat{\psi}^{-1})_N) \circ T \circ \hat{\varphi}, [(T \circ \hat{\varphi})']_i \rangle = 0, \quad i = 1, \dots, N-1.$$

Cette dernière égalité entraîne que $(\text{grad}(\hat{\psi}^{-1})_N) \circ T \circ \hat{\varphi}$ est colinéaire à

$\bigwedge_{i=1}^{N-1} [(T \circ \hat{\varphi})']_i$, donc (4.61) donne presque partout dans \mathcal{V}' :

$$(4.75) \quad \left| \frac{\partial \hat{S}_N}{\partial y_N} \right| = \frac{(|\text{grad}(\hat{\psi}^{-1})_N|_{\mathbb{R}^N}) \circ T \circ \varphi}{\left| \bigwedge_{i=1}^{N-1} [(T \circ \hat{\varphi})']_i \right|_{\mathbb{R}^N}} \left| \langle \bigwedge_{i=1}^{N-1} [(T \circ \hat{\varphi})']_i, [(T \circ \hat{\varphi})']_N \rangle \right|$$

Or pour toute matrice $[M]$ on a

$$\langle \bigwedge_{i=1}^{N-1} [M]_i, [M]_N \rangle = \det [M]$$

et quand $[M]$ est inversible on a (cela se montre en utilisant la caractérisation des éléments d'une matrice inverse comme quotient du cofacteur par le déterminant de la matrice)

$$\bigwedge_{i=1}^{N-1} [M]_i = \det [M] \cdot ({}^t [M]^{-1})_N.$$

L'égalité (4.75) donne donc, puisque $|\text{grad}(\hat{\psi}^{-1})_N|_{\mathbb{R}^N} = |\text{grad} \hat{\psi}_N|_{\mathbb{R}^N}$

qui ne dépend pas de x_N ,

$$(4.76) \quad \left| \frac{\partial \hat{s}_N}{\partial y_N} \right| = \frac{(|\text{grad} \hat{\psi}_N|_{\mathbb{R}^N}) \cdot \hat{\psi}^{-1} \circ T \circ \hat{\varphi}}{|({}^t [(T \circ \hat{\varphi})']^{-1})_N|_{\mathbb{R}^N}} \quad \text{p.p. dans } \mathcal{U}'$$

Enfin ∂Q est localement représenté par $x_N - \varphi(x') = 0$, donc il a pour presque tout $x' \in \mathcal{U}'$ une normale au point $\hat{\varphi}(x')$, qui vaut

$$\begin{aligned} n(\hat{\varphi}(x')) &= \left(\sum_{i=1}^{N-1} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x') \right|^2 + 1 \right)^{-1/2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x'), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_{N-1}}(x'), -1 \right) \\ &= -(|\text{grad} \hat{\varphi}_N|_{\mathbb{R}^N})^{-1} \cdot ({}^t [\hat{\varphi}']^{-1})_N, \end{aligned}$$

comme ${}^t [(T \circ \hat{\varphi})']^{-1} = \{ {}^t [T']^{-1} \circ \hat{\varphi} \} \cdot {}^t [\hat{\varphi}']^{-1}$, on a p.p. dans \mathcal{U}'

$$({}^t [(T \circ \hat{\varphi})']^{-1})_N = \{ {}^t [T']^{-1} \circ \hat{\varphi} \} \cdot ({}^t [\hat{\varphi}']^{-1})_N = \{ {}^t [T']^{-1} \circ \hat{\varphi} \} \cdot (-|\text{grad} \hat{\varphi}_N|_{\mathbb{R}^N} (n_{\circ} \hat{\varphi}))$$

On en déduit que

$$(4.77) \quad |({}^t [(T \circ \hat{\varphi})']^{-1})_N|_{\mathbb{R}^N} = |\text{grad} \hat{\varphi}_N|_{\mathbb{R}^N} \{ |{}^t [T']^{-1} n|_{\mathbb{R}^N} \circ \hat{\varphi} \}.$$

En utilisant les égalités (4.73), (4.76) et (4.77), on établit

(4.69), ce qui achève la démonstration du lemme. ■

4.3.3 Transport de la normale par un difféomorphisme.

Rappelons que tout ouvert Q de \mathbb{R}^N , localement graphe lipschitzien, a une normale extérieure presque partout sur ∂Q . On a le résultat de transport de normale suivant :

LEMME 4.8.

Soit Q un ouvert de \mathbb{R}^N localement graphe lipschitzien et soit $T \in \mathcal{C}^1, \bar{\mathcal{C}}$. On a :

$$(4.78) \quad n(T(Q)) \circ T = \frac{[T']^{-1} n(Q)}{|[T']^{-1} n(Q)|_{\mathbb{R}^N}} \quad \text{p.p. sur } \partial Q^{(1)},$$

où $n(D)$ est la normale extérieure à un domaine D .

Si Q est de classe \mathcal{C}^1 , (4.78) est vraie en tout point de ∂Q .

Démonstration du lemme 4.8.

Puisque Q est localement graphe lipschitzien, ∂Q est localement représenté par $x_N = \psi(x')$ pour $x' \in \Delta \subset \mathbb{R}^{N-1}$ où ψ est lipschitzienne. Posons

$$(4.79) \quad \phi(x) = \psi(x') - x_N,$$

∂Q et Q sont localement représentés par $\phi(x) = 0$ et $\phi(x) < 0$, et $\partial T(Q)$ et $T(Q)$ sont localement représentés par $\phi \circ T^{-1}(y) = 0$ et $\phi \circ T^{-1}(y) < 0$.

La fonction ψ est lipschitzienne, donc dérivable en presque tout point de Δ . Si x'_0 est un tel point, ϕ est dérivable au point $x_0 = (x'_0, \psi(x'_0))$ et

$$(4.80) \quad (n(Q))(x_0) = \frac{\text{grad } \phi(x_0)}{|\text{grad } \phi(x_0)|_{\mathbb{R}^N}}$$

(1) ce qui signifie que (4.78) a lieu au point $(x', \psi(x'))$ pour presque tout x' de Δ si ∂Q est représenté localement par le graphe $x_N = \psi(x')$ sur le pavé Δ .

Le théorème de dérivation des fonctions composées montre alors que $\phi \circ T^{-1}$ est dérivable au point $y_0 = T(x_0)$ et

$$(4.81) \quad (n(T(Q)))(y_0) = \frac{(\text{grad}(\phi \circ T^{-1}))(y_0)}{|(\text{grad}(\phi \circ T^{-1}))(y_0)|_{\mathbb{R}^N}}$$

D'autre part on a

$$(4.82) \quad (\text{grad}(\phi \circ T^{-1}))(y_0) = ({}^c[T']^{-1} \text{grad} \phi)(x_0) = (\{ {}^c[T']^{-1} n(Q) \} |\text{grad} \phi|)(x_0)$$

et (4.81) donne (4.78).

Si Q est de classe \mathcal{C}^1 , ϕ est de classe \mathcal{C}^1 et on peut faire le raisonnement en tout point de ∂Q (et non seulement presque partout).

4.3.4. Formule d'intégration par parties sur le bord d'un ouvert.

Donnons un lemme d'intégration par parties qui correspond à une formule de Green sur le bord d'un ouvert.

LEMME 4.9.

Soit Q un ouvert borné de classe $W^{2,\infty}$, f une fonction de $W^{2,1}(Q)$ et θ un champ de vecteurs de $W^{1,\bar{c}}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$. On a :

$$(4.83) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\partial Q} \{ \langle \theta, \text{grad} f \rangle + f(\text{div} \theta - \langle [\theta'] n, n \rangle) \} ds \\ = \int_{\partial Q} \langle n, \theta \rangle \left\{ \frac{\partial f}{\partial n} + Hf \right\} ds \end{array} \right.$$

où n est la normale extérieure à ∂Q , $\frac{\partial f}{\partial n} = \langle n, \text{grad} f \rangle$ et où H est la courbure moyenne de ∂Q .

Remarque 4.8.

i) Tous les termes de (4.83) ont un sens. En effet θ , $\text{div} \theta$ et $[\theta']$ sont continues et bornées sur Q , f et $\text{grad} f$ ont des traces dans $L^1(\partial Q)$ et $\frac{\partial f}{\partial n}$ appartient à $L^1(\partial Q)$.

ii) La courbure moyenne H est définie comme somme des valeurs propres de l'application de Weingarten (cf. par exemple HICKS [1]).

Comme Q est de classe $W^{2,\infty}$, on peut représenter localement ∂Q , sur un pavé Δ de dimension $N-1$ et dans un système d'axes (x', x_N) , par $x_N = \psi(x')$ où ψ appartient à $W^{2,\infty}(\Delta)$; la courbure moyenne est alors donnée par :

$$(4.84) \quad \begin{cases} H(x', \psi(x')) = \left(1 + \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_k}(x')\right)^2\right)^{-3/2} \times \\ \times \sum_{j=1}^{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2}(x') \left(1 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x')\right)^2\right) - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j}(x') \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x') \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(x') \right\} \end{cases}$$

On a donc $H \in L^\infty(\partial Q)$, et (4.84) redonne les formules habituelles de la courbure moyenne en dimension 2 et 3.

Démonstration du lemme 4.9.

i) Localisation.

L'ouvert Q étant de classe $W^{2,\infty}$, la fonction $f \in W^{2,1}(Q)$ admet un prolongement appartenant à $W^{2,1}(\mathbb{R}^N)$ qu'on notera encore f .

En utilisant une partition de l'unité de ∂Q , comme dans la démonstration du lemme 4.7, on montre qu'il suffit d'établir (4.83) localement. Plus précisément on se donne un système d'axes (x', x_N) , un ouvert \mathcal{U}' de $\mathbb{R}_{x'}^{N-1}$ et une fonction ψ appartenant à $W^{2,\infty}(\mathcal{U}')$ tels que dans l'ouvert cylindrique de \mathbb{R}^N

$$\mathcal{U} = \{(x', x_N) \mid x' \in \mathcal{U}', |x_N| < \varepsilon\},$$

∂Q soit représenté par $x_N = \psi(x')$. En utilisant la formulation (4.62) de l'intégrale superficielle, il suffit, pour démontrer (4.83) d'établir que, pour f appartenant à $W^{2,1}(\mathcal{U})$ et à support compact dans \mathcal{U} , on a :

$$(4.85) \quad \left\{ \int_{V'} \left\{ \langle \theta, \text{grad } f \rangle + f \text{ div } \theta - f \langle [\theta'] n, n \rangle \right\} \cdot \psi \right\} |\text{grad } \hat{\psi}_N|_{\mathbb{R}^N} dx' = \\ = \int_{V'} \left\{ \langle n, \theta \rangle \left(\frac{\partial f}{\partial n} + H f \right) \right\} \cdot \hat{\psi} \Big|_{\mathbb{R}^N} |\text{grad } \hat{\psi}_N|_{\mathbb{R}^N} dx'$$

où $\hat{\psi}(x', x_N) = (x', x_N + \psi(x'))$.

ii) Démonstration de (4.85).

Etant donné $\phi \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ le théorème de dérivation des applications composées montre que en tout point de \mathbb{R}^N

$$(4.86) \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) \circ \hat{\psi} = \frac{\partial(\phi \circ \hat{\psi})}{\partial x_j} - \frac{\partial(\phi \circ \hat{\psi})}{\partial x_N} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \quad j = 1, \dots, N-1$$

$$(4.87) \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_N} \right) \circ \hat{\psi} = \frac{\partial(\phi \circ \hat{\psi})}{\partial x_N}$$

On en déduit que en tout point de $\mathbb{R}_{x'}^{N-1}$, on a

$$(4.88) \quad \left\{ \begin{aligned} \{ \text{div } \theta - \langle [\theta'] n, n \rangle \} \circ \hat{\psi} &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N ((\delta_{ij} - n_i n_j) \frac{\partial \theta_i}{\partial x_j}) \circ \hat{\psi} \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ \sum_{j=1}^{N-1} (\delta_{ij} - (n_i \circ \hat{\psi})(n_j \circ \hat{\psi})) \frac{\partial(\theta_i \circ \hat{\psi})}{\partial x_j} + R_i \frac{\partial(\theta_i \circ \hat{\psi})}{\partial x_N} \right\} \end{aligned} \right.$$

où

$$R_i = - \left(\sum_{j=1}^{N-1} (\delta_{ij} - (n_i \circ \hat{\psi})(n_j \circ \hat{\psi})) \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) + \delta_{iN} - (n_i \circ \hat{\psi})(n_N \circ \hat{\psi}),$$

et où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker. Les composantes de la normale

$n \circ \hat{\psi}$ sont données par

$$(4.89) \quad \left\{ \begin{aligned} n_i \circ \hat{\psi} &= \frac{\partial \psi}{\partial x_i} / \sqrt{1 + \sum_{k=1}^{N-1} \left| \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \right|^2} \quad \text{si } i < N \\ n_N \circ \hat{\psi} &= -1 / \sqrt{1 + \sum_{k=1}^{N-1} \left| \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \right|^2} \end{aligned} \right.$$

et on vérifie que pour tout i , $R_i = 0$.

D'après nos hypothèses, $f \circ \hat{\psi}$ appartient à $W^{2,1}(\hat{\psi}^{-1}(\mathcal{V}))$, et

$$\hat{\psi}^{-1}(\mathcal{V}) = \{(x', x_N) \mid x' \in \mathcal{V}', |x_N - \psi(x')| < \varepsilon\}$$

donc $f \circ \hat{\psi}$ a une trace $f \circ \hat{\psi}|_{\mathcal{V}'}$, qui appartient à $W^{1,1}(\mathcal{V}')$, et l'on a $\frac{\partial}{\partial x_i}((f \circ \hat{\psi})|_{\mathcal{V}'}) = (\frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ \hat{\psi}))|_{\mathcal{V}'}$, si $1 \leq i \leq N-1$.

En utilisant (4.88) et en intégrant par parties, on a, puisque

$$(4.90) \quad \left\{ \begin{array}{l} f \circ \hat{\psi}|_{\mathcal{V}'} \text{ est à support compact dans } \mathcal{V}' : \\ \int_{\mathcal{V}'} \left\{ f \left(\operatorname{div} \theta - \langle [\theta'] n, n \rangle \right) \circ \hat{\psi} \right\} |\operatorname{grad} \psi_N|_{\mathbb{R}^N} dx' = \\ = \int_{\mathcal{V}'} (f \circ \hat{\psi}) \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{j=1}^{N-1} (\delta_{ij} - (n_i \circ \hat{\psi})(n_j \circ \hat{\psi})) \frac{\partial(\theta_i \circ \hat{\psi})}{\partial x_j} \right\} |\operatorname{grad} \psi_N|_{\mathbb{R}^N} dx' \\ = - \int_{\mathcal{V}'} \sum_{i=1}^N (\theta_i \circ \hat{\psi}) \left\{ \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\partial(f \circ \hat{\psi})}{\partial x_j} (\delta_{ij} - (n_i \circ \hat{\psi})(n_j \circ \hat{\psi})) |\operatorname{grad} \hat{\psi}_N|_{\mathbb{R}^N} + \right. \\ \left. + (f \circ \hat{\psi}) \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\partial}{\partial x_j} ((\delta_{ij} - (n_i \circ \hat{\psi})(n_j \circ \hat{\psi})) |\operatorname{grad} \hat{\psi}_N|_{\mathbb{R}^N}) \right\} dx' \end{array} \right.$$

D'après le lemme 4.1 ii), on a

$$\operatorname{grad}(f \circ \hat{\psi}) = {}^t[\hat{\psi}'] \{ \operatorname{grad} f \} \circ \hat{\psi}.$$

et chaque expression a une trace sur \mathcal{V}' , de sorte que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(f \circ \hat{\psi})}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} \circ \hat{\psi} + \frac{\partial f}{\partial x_N} \circ \hat{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \quad 1 \leq j \leq N-1 \\ \frac{\partial(f \circ \hat{\psi})}{\partial x_N} = \frac{\partial f}{\partial x_N} \circ \hat{\psi} \end{array} \right.$$

En utilisant ces égalités, on vérifie que pour tout $i \leq N$, on a presque partout dans \mathcal{V}' :

$$(4.91) \left\{ \begin{aligned} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\partial(f \circ \hat{\psi})}{\partial x_j} (\delta_{ij} - (n_i \circ \hat{\psi}) (n_j \circ \hat{\psi})) &= \\ &= \left(\sum_{j=1}^N (\delta_{ij} - n_i n_j) \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) \circ \hat{\psi} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} - n_i \langle n, \text{grad } f \rangle \right) \circ \hat{\psi} \end{aligned} \right.$$

D'autre part, en exprimant les composantes $n_j \circ \hat{\psi}$ avec (4.89), en notant que

$$|\text{grad } \hat{\psi}_N|_{\mathbb{R}^N} = \sqrt{1 + \sum_{k=1}^{N-1} \left| \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \right|^2}, \text{ et en utilisant la définition (4.84) de la}$$

courbure H , on vérifie que, pour tout $i \leq N$, on a

$$(4.92) \quad \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\partial}{\partial x_j} ((\delta_{ij} - (n_i \circ \hat{\psi}) (n_j \circ \hat{\psi})) |\text{grad } \hat{\psi}_N|_{\mathbb{R}^N}) = -(n_i \circ \hat{\psi}) (H \circ \hat{\psi}) |\text{grad } \hat{\psi}_N|_{\mathbb{R}^N}$$

En reportant (4.91) et (4.92) dans (4.90), on en déduit (4.85). ■

4.4. DERIVATION D'UNE INTEGRALE SUPERFICIELLE PAR RAPPORT A SON DOMAINE

D'INTEGRATION.

4.4.1. Résultat général.

On se donne

$$(4.93) \left\{ \begin{aligned} Q \text{ un ouvert borné de } \mathbb{R}^N, \text{ localement graphe lipschitzien, et } (k, \sigma) \text{ un couple} \\ \text{tel que, } k \text{ est entier, } k > 1 \text{ et } \sigma = +\infty \text{ ou } \bar{c}, \text{ ou } k = 1 \text{ et } \sigma = \bar{c}. \end{aligned} \right.$$

Nous allons nous intéresser à la dérivabilité de la fonctionnelle

définie par

$$(4.94) \quad J(D) = \int_{\partial D} \phi(D) \, ds$$

où ϕ est définie sur $\mathcal{D}_Q^{k, \sigma}$ et telle que $\phi(D) \in L^1(\partial D)$.

Rappelons que sous l'hypothèse (4.93) tout domaine D appartenant à

$\mathcal{D}_Q^{k, \sigma}$ est localement graphe lipschitzien, et que si θ est assez proche de

zéro dans $W^{k, \sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ alors $I + \theta \in \mathcal{G}^{k, \sigma}$ et, D étant fixé, $(I + \theta)(D) \in \mathcal{D}_Q^{k, \sigma}$;

on définit le transporté de $\bar{\phi}_D$ de ϕ sur ∂D par :

$$(4.95) \quad \bar{\phi}_D(\theta) = \phi((I + \theta)(D)) \circ (I + \theta)$$

qui appartient à $L^1(\partial D)$ d'après le lemme 4.7. Notons que $\bar{\phi}_D(0) = \phi(D)$.

THEOREME 4.3.

On suppose l'hypothèse (4.93) vérifiée, et on se donne $D_0 \in \mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$.

Si l'application $\bar{\phi}_{D_0}$ définie par (4.95) est dérivable de $W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ à valeurs

dans $L^1(\partial D_0)$ au point 0, alors l'application J définie par (4.94) est dérivable

de $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ dans \mathbb{R} au point D_0 , et l'on a pour tout τ appartenant à $W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$:

$$(4.96) \quad \frac{\partial J}{\partial D}(D_0) \cdot \tau = \int_{\partial D_0} \{ \phi(D_0) (\operatorname{div} \tau - \langle [\tau'] n, n \rangle) + \frac{\partial \bar{\phi}_{D_0}}{\partial \theta}(0) \cdot \tau \} ds$$

où n est la normale extérieure à ∂D_0 .

Démonstration du théorème 4.3.

Il s'agit, d'après la définition 3.1, d'établir la dérivabilité de l'application $J_{D_0}^{**}$ définie sur un voisinage de 0 de $W^{k,\sigma}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ par :

$$(4.97) \quad J_{D_0}^*(\theta) = J((I + \theta)(D_0)) = \int_{\partial((I + \theta)(D_0))} \phi((I + \theta)(D_0)) ds$$

Le lemme 4.7 de changement de variable donne, avec (4.95)

$$(4.98) \quad J_{D_0}^*(\theta) = \int_{\partial D_0} \bar{\phi}_{D_0}(\theta) |\det [(I + \theta)']| \left| {}^t[(I + \theta)']^{-1} n \right|_{\mathbb{R}^N} ds$$

Or l'application $\theta \rightarrow \left| {}^t[(I + \theta)']^{-1} n \right|_{\mathbb{R}^N}$ est dérivable à valeurs dans $L^\infty(\partial D_0)$

avec

$$(4.99) \quad \frac{\partial \left| {}^t[(I + \theta)']^{-1} n \right|_{\mathbb{R}^N}}{\partial \theta}(0) \cdot \tau = - \langle n, {}^t[\tau'] n \rangle$$

puisque $T \rightarrow [T']^{-1}$ est dérivable, (cf. lemme 4.3) et puisque l'application

$f \rightarrow |f|_{R^N}$ est dérivable de $L^\infty(\partial D, R^N)$ à valeurs dans $L^\infty(\partial D, R)$ en tout point

f tel que $|f(x)| \geq \alpha$ p.p. ($\alpha > 0$) avec pour dérivée :

$$\frac{\partial |f|_{R^N}}{\partial f} (f_0) \cdot g = \frac{\langle f_0, g \rangle}{|f|_{R^N}}, \quad \forall g \in L^\infty(\partial Q, R^N)$$

Le résultat de dérivabilité (4.99), joint à la dérivabilité du déterminant (cf. lemme 4.2), et à l'hypothèse de dérivabilité de $\bar{\phi}(D_0)$ montre que l'application $J_{D_0}^*$ est dérivable de $W^{k,\sigma}(R^N, R^N)$ à valeurs dans R au point 0, et l'on a pour tout $\tau \in W^{k,\sigma}(R^N, R^N)$:

$$\frac{\partial J_{D_0}^*}{\partial \theta}(0) \cdot \tau = \int_{\partial D_0} \left\{ \frac{\partial \phi_{D_0}}{\partial \theta}(0) \cdot \tau + \bar{\phi}_{D_0} (\operatorname{div} \tau - \langle [\tau'] n, n \rangle) \right\} ds$$

ce qui établit le théorème.

4.4.2. Cas où la fonction intégrée ne dépend pas du domaine.

Nous allons considérer le cas où $\phi(D)$ est la trace sur ∂D d'une fonction f donnée dans R^N , c'est à dire le cas où :

$$(4.100) \quad J(D) = \int_{\partial D} f ds$$

THEOREME 4.4.

On suppose l'hypothèse (4.93) vérifiée.

i) Etant donné $f \in W^{2,1}(R^N)$, l'application J définie par (4.100) est dérivable de $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$ à valeurs dans R en tout point D , et on a, pour tout

$\tau \in W^{k,\sigma}(R^N, R^N)$:

$$(4.101) \quad \frac{\partial J}{\partial D}(D) \cdot \tau = \int_{\partial D} \left\{ \langle \operatorname{grad} f, \tau \rangle + f (\operatorname{div} \tau - \langle [\tau'] n, n \rangle) \right\} ds$$

où n est la normale extérieure à ∂D .

ii) Si de plus D est de classe $W^{2,\infty}$, on a pour tout $\tau \in W^{k,\sigma}(R^N, R^N)$:

$$(4.102) \quad \frac{\partial J}{\partial D}(D) \cdot \tau = \int_{\partial D} \langle n, \tau \rangle \left(\frac{\partial f}{\partial n} + H f \right) ds$$

où H est la courbure moyenne de ∂D , définie à la remarque 4.8.

Démonstration du théorème 4.4.

Nous allons appliquer le théorème 4.3. On a ici :

$$\bar{\Phi}_D(\theta) = f|_{\partial((I+\theta)(D))} \circ (I+\theta) = f \circ (I+\theta)|_{\partial D} ;$$

le lemme 4.4 ii) complété par la remarque 4.2 ii) montre que $\bar{\Phi}_D$ est dérivable de $W^{k,\sigma}(R^N, R^N)$ à valeurs dans $L^1(\partial D)$ avec pour tout $\tau \in W^{k,\sigma}(R^N, R^N)$:

$$\frac{\partial \bar{\Phi}_D}{\partial \theta}(0) \cdot \tau = \langle \text{grad } f, \tau \rangle|_{\partial D} .$$

et le théorème 4.3 montre alors que la partie i) du théorème est vérifiée.

Quand D est de classe $W^{2,\infty}$, on peut utiliser l'identité établie au lemme 4.9 pour transformer le second membre de (4.101), ce qui établit (4.102).

V - ETUDE D'UN PROBLEME MODELE DE CONTRÔLE PAR LE DOMAINE,
ASSOCIE A UN PROBLEME DE DIRICHLET.

5.0. INTRODUCTION

On va dans ce chapitre étudier un problème modèle de contrôle par le domaine et quelques variantes, en utilisant les espaces de domaines $\mathcal{D}_Q^{k,\sigma}$, qu'on a munis au chapitre 2 d'une structure métrique complète et au chapitre 3 d'une structure différentielle.

On s'intéressera à la fonction coût J définie sur l'espace $\mathcal{D}_Q^{1,\infty}$ de domaines de \mathbb{R}^N par

$$J(D) = \int_D |\text{grad } (u(D)-z)|^2$$

où l'état $u(D)$ du système est la solution du problème de Dirichlet non homogène dans D :

$$(5.0) \quad \begin{cases} -\Delta u(D) = f & \text{dans } D \\ u(D) = g & \text{sur } \partial D \end{cases}$$

(Q est un ouvert donné de \mathbb{R}^N et f, g, z sont des fonctions données sur \mathbb{R}^N).

On donnera un résultat d'existence d'un domaine optimal : étant donné un ensemble \mathcal{D}_{ad} de domaines admissibles, vérifiant une hypothèse de compacité, on montrera (par une méthode de prolongement à \mathbb{R}^N) qu'il existe un domaine D_0 réalisant le minimum de J dans \mathcal{D}_{ad} .

On montrera également que J est dérivable de $\mathcal{D}_Q^{1,\infty}$ à valeurs dans \mathbb{R} et on calculera sa dérivée, sous des hypothèses de régularité faibles (en particulier sans hypothèse sur le bord de Q , donc sur celui

des domaines de $\mathcal{D}_Q^{1,\infty}$). On établira la dérivabilité de J en un point D_0 en utilisant les résultats généraux du chapitre 4, ce qui nous conduira à établir un résultat important de dérivation d'un transporté de l'état sur le domaine fixe D_0 .

En supposant le domaine D_0 régulier (et en utilisant la formule de Stokes), on mettra la dérivée de J sous la forme

$$\frac{\partial J}{\partial D}(D_0) \cdot \tau = \int_{\partial D_0} \langle n, \tau \rangle \mathcal{F}(u(D_0), p(D_0))$$

où $\langle n, \tau \rangle = \sum_{i=1}^N n_i \tau_i$ est la composante normale de τ , et où $p(D_0)$ est un état adjoint qui ne dépend pas de τ ; cette expression permet de déterminer explicitement les directions de descente.

Pour déduire de ces résultats de dérivation des conditions nécessaires d'optimalité, on renvoie aux résultats généraux du paragraphe 3.4, qui font intervenir l'espace tangent dans $\mathcal{D}_Q^{1,\infty}$ à \mathcal{D}_{ad} au point D_0 , et aux exemples d'études d'espaces tangents donnés au paragraphe 3.5. On n'étudiera pas ici la construction des méthodes de descente à partir de la dérivée de J , on renvoie pour cela par exemple aux résultats de CEA [1] relatifs aux problèmes non convexes.

On s'intéressera ensuite à une variante du problème précédent : on étudiera la fonction cout J_1 définie sur $\mathcal{D}_Q^{2,\infty}$, pour Q assez assez régulier, par

$$J_1(D) = \int_{\partial D} \left| \frac{\partial u(D)}{\partial n} - z \right|^2$$

où l'état $u(D)$ est défini par (5.0). On donnera un résultat d'existence d'un domaine optimal (par une méthode de transport sur le domaine fixe Q), et un résultat de dérivation de J_1 .

On s'intéressera enfin à la dérivation par rapport à D de restrictions et d'un prolongement de l'état $u(D)$ à des domaines fixes, ce qui montrera que l'application $D \rightarrow u(D)$ est dérivable en un sens local. Cela conduira à des résultats de dérivation de fonctionnelles définies par

$$J_2(D) = \int_A |\tilde{u}(D) - z|^2$$

où A est un domaine fixe de \mathbb{R}^N , et $\tilde{u}(D)$ un prolongement de $u(D)$ à \mathbb{R}^N .

On suivra le plan :

- 5.1. Position du problème.
- 5.2. Existence d'un domaine optimal.
- 5.3. Dérivation de la fonction coût.
- 5.4. Dérivation du transporté sur un domaine fixe de la solution du problème homogène.
- 5.5. Démonstration des résultats de dérivation de la fonction coût.
- 5.6. Variante relative à une fonction coût définie par une intégrale sur le bord du domaine.
- 5.7. Compléments sur la dérivation de l'état. Applications à l'étude de problèmes où la fonction coût est définie par une intégrale sur un domaine fixe.

Les méthodes de ce chapitre permettent de traiter d'autres problèmes de contrôle par le domaine. Ainsi on étudiera au chapitre suivant des problèmes où l'état $u(D)$ sera solution d'un problème de Neumann dans D . On pourrait également traiter avec ces méthodes des problèmes dans lesquels l'état du système est solution d'un problème non linéaire, et dans lesquels la fonction coût n'est pas quadratique.

5.1. POSITION DU PROBLEME

On se donne

$$(5.1) \quad \begin{cases} Q \text{ un ouvert borné connexe de } \mathbb{R}^N \\ f \in H^{-1}(\mathbb{R}^N), g \in H^1(\mathbb{R}^N) \text{ et } z \in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

Tout domaine D de $\mathcal{D}_Q^{1,\infty}$ est encore un ouvert borné connexe de \mathbb{R}^N , et le théorème de Lax-Milgram montre qu'il existe $v(D)$ unique tel que :

$$(5.2) \quad \begin{cases} v(D) \in H_0^1(D) \\ \int_D \langle \text{grad } v(D), \text{grad } \varphi \rangle = \langle\langle f, \varphi \rangle\rangle - \int_D \langle \text{grad } g, \text{grad } \varphi \rangle \\ \forall \varphi \in H_0^1(D) \end{cases}$$

où, en appelant $\tilde{\varphi}$ le prolongé de φ par zéro en dehors de D , on note

$$\langle\langle f, \varphi \rangle\rangle = \langle\langle f, \tilde{\varphi} \rangle\rangle_{H^{-1}(\mathbb{R}^N), H_0^1(\mathbb{R}^N)} \quad \forall \varphi \in H_0^1(D)$$

Nous poserons

$$(5.3) \quad u(D) = v(D) + g$$

Alors $u(D)$ appartient à $H^1(D)$ et est la solution unique du problème de Dirichlet non homogène ⁽¹⁾

$$(5.4) \quad \begin{cases} -\Delta u(D) = f & \text{au sens des distributions dans } D \\ u(D) - g \in H_0^1(D) \end{cases}$$

(1) Nous n'avons pas fait d'hypothèses de régularité sur ∂Q , et on ne peut donc écrire $u(D) = g$ sur ∂D , puisqu'en général, il n'y a pas de traces sur ∂D .

On définit la fonction coût J par :

$$(5.5) \quad J(D) = \int_D |\text{grad}(u(D)-z)|^2 dx$$

REMARQUE 5.1

On pourrait bien sûr remplacer $-\Delta$ par un opérateur elliptique plus général, du type

$$-\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i}) + \sum_{i=1}^N b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c,$$

avec des hypothèses de coercivité et de régularité sur les coefficients.

On pourrait également remplacer dans la définition de la fonction

coût $\text{grad}(u-z)$ par $\sum_{i=1}^N d_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + e u$, avec des hypothèses de

régularité sur les coefficients. ■

REMARQUE 5.2

La fonctionnelle J est d'ordre 1, en ce sens que l'application

$u \rightarrow \int_D |\text{grad}(u-z)|^2 dx$ est définie sur $H^1(D)$. On traitera au paragraphe

5.6. le cas d'une fonctionnelle définie par une intégrale sur ∂D , d'ordre plus élevé. ■

5.2. EXISTENCE D'UN DOMAINE OPTIMALTHEOREME 5.1

On fait l'hypothèse (5.1) et on suppose que :

$$(5.6) \quad Q \text{ est de classe } W^{1,\infty}$$

On se donne

$$(5.7) \quad \begin{cases} \mathcal{D}_{ad} \text{ un sous-ensemble de } \mathcal{D}_Q^{1,\infty}, \text{ compact pour la distance}^{(1)} \\ \widehat{\text{dist}}(D_1, D_2) = \text{dist}(D_1, D_2) + \text{dist}(\mathbb{R}^N - D_1, \mathbb{R}^N - D_2) \end{cases}$$

Alors il existe un domaine optimal D_0 , i.e tel que :

$$D_0 \in \mathcal{D}_{ad}, \quad J(D_0) \leq J(D) \quad \forall D \in \mathcal{D}_{ad} \quad \blacksquare$$

REMARQUE 5.3

Le théorème de compacité 2.4 ii) montre que l'hypothèse (5.7) est vérifiée si \mathcal{D}_{ad} est une $d_{1,\infty}$ boule fermée, ou plus généralement si :

$$(5.8) \quad \begin{cases} \mathcal{D}_{ad} \text{ est un sous-ensemble de } \mathcal{D}_Q^{1,\infty}, \text{ borné pour la pseudo-distance} \\ d_{1,\infty} \text{ et fermé pour la distance } \widehat{\text{dist}}. \end{cases} \quad \blacksquare$$

(1) où $\widehat{\text{dist}}$ désigne la distance de Hausdorff.

DEMONSTRATION DU THEOREME 5.1

1) Propriétés de $\mathcal{D}_Q^{1,\infty}$ muni de $\widehat{\text{dist}}$.

Soient $\{D_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, une suite de $\mathcal{D}_Q^{1,\infty}$ et $D_0 \in \mathcal{D}_Q^{1,\infty}$ tels que $\widehat{\text{dist}}(D_n, D_0) \rightarrow 0$, et soient K_1 et K_2 deux fermés de \mathbb{R}^N tels que $K_1 \subset D_0$ et $K_2 \subset \mathbb{R}^N - \overline{D_0}$. Alors, d'après la définition de la distance de Hausdorff,

$$(5.9) \quad K_1 \subset D_n, \quad K_2 \subset \mathbb{R}^N - \overline{D_n} \text{ pour } n \text{ assez grand.}$$

En considérant des fermés réduits à un point, il en résulte, puisque $\text{mes } \partial D_0 = 0$, que ⁽¹⁾

$$\chi(D_n) \rightarrow \chi(D_0) \text{ p.p. dans } \mathbb{R}^N$$

En utilisant le théorème de Lebesgue (et D_0 borné), et en notant que la suite est bornée dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$, il vient

$$(5.10) \quad \chi(D_n) \rightarrow \chi(D_0) \text{ dans } L^\infty(\mathbb{R}^N) \text{ faible étoile} \\ \text{et dans } L^p(\mathbb{R}^N) \text{ fort } 1 \leq p < +\infty$$

2) Continuité par rapport à D d'un prolongement de l'état.

Il résulte en particulier de (5.9) que

$$(5.11) \quad D_n \subset B(0, r) \text{ où } r \text{ est indépendant de } n.$$

Soit $\tilde{v}(D_n)$ le prolongé de $v(D_n)$ par 0 en dehors de D_n , $\tilde{v}(D_n)$ appartient à $H^1(\mathbb{R}^N)$ et on a :

$$(5.12) \quad \|\tilde{v}(D_n)\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \|v(D_n)\|_{H^1(D_n)}$$

(1) $\chi(D)$ désigne la fonction caractéristique de D .

L'équation (5.2) relative à D_n donne pour $\varphi = v(D_n)$

$$\begin{aligned} \left(\|\text{grad } v(D_n)\|_{L^2(D_n, \mathbb{R}^N)} \right)^2 &\leq \|f\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^N)} \|v(D_n)\|_{H^1(D_n)} + \\ &+ \|\text{grad } g\|_{L^2(D_n, \mathbb{R}^N)} \|\text{grad } v(D_n)\|_{L^2(D_n, \mathbb{R}^N)} \end{aligned}$$

et l'inégalité de Poincaré montre, avec (5.11) et (5.12), que la suite $\tilde{v}(D_n)$ est bornée dans $H^1(\mathbb{R}^N)$; on peut donc extraire une sous suite telle que

$$(5.13) \quad \tilde{v}(D_m) \rightarrow w \text{ dans } H^1(\mathbb{R}^N) \text{ faible.}$$

On a

$$\tilde{v}(D_m)(1 - \chi_{D_m}) = 0$$

et les résultats de convergence (5.10) et (5.13) montrent que w est nul presque partout dans $\mathbb{R}^N - D_0$; comme D_0 est de classe $W^{1,\infty}$, il en résulte, cf. (4.5), que

$$(5.14) \quad w|_D \in H^1_0(D_0), \quad (w|_D)^\sim = w.$$

Etant donné $\varphi \in \mathcal{D}(D_0)$, on a d'après (5.9)

support $\varphi \subset D_m$ pour m assez grand

et l'équation (5.2) relative à $(\tilde{\varphi})|_{D_m}$ peut s'écrire

$$\int_{\mathbb{R}^N} \langle \text{grad } \tilde{v}(D_m), \text{grad } \tilde{\varphi} \rangle = \langle\langle f, \varphi \rangle\rangle - \int_{\mathbb{R}^N} \langle \text{grad } g, \text{grad } \tilde{\varphi} \rangle.$$

Le résultat de convergence (5.13) permet de passer à la limite dans cette équation, ce qui donne

$$\int_{\mathbb{R}^N} \langle \text{grad } w, \text{grad } \tilde{\varphi} \rangle = \langle\langle f, \varphi \rangle\rangle - \int_{\mathbb{R}^N} \langle \text{grad } g, \text{grad } \tilde{\varphi} \rangle$$

ce qui, compte tenu de (5.14), montre que $w = \tilde{v}(D_0)$.

Il en résulte que la convergence (5.13) a lieu pour toute la suite $\tilde{v}(D_n)$, ce qui montre que

$$(5.15) \left\{ \begin{array}{l} \text{l'application } D \rightarrow \tilde{v}(D) \text{ est continue de } \mathcal{D}_Q^{1,\infty} \text{ muni} \\ \text{de la distance } \widehat{\text{dist}} \text{ à valeurs dans } H^1(\mathbb{R}^N) \text{ faible.} \end{array} \right.$$

3) Semi-continuité inférieure de J .

On a

$$\begin{aligned} J(D) &= \int_D |\text{grad } (u(D)-z)|^2 = \int_D |\text{grad } (v(D)+g-z)|^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\text{grad } (\tilde{v}(D)+g-z)|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} |\text{grad } (g-z)|^2 + \int_D |\text{grad } (g-z)|^2 \end{aligned}$$

La propriété de continuité (5.15) jointe à la semi continuité inférieure de la norme pour la topologie faible d'un espace de Hilbert montre que

$$D \rightarrow \int_{\mathbb{R}^N} |\text{grad } (\tilde{v}(D) + g-z)|^2 \text{ est s.c.i sur } \mathcal{D}_Q^{1,\infty} \text{ muni de } \widehat{\text{dist}} ,$$

et (5.10) montre que

$$D \rightarrow \int_D |\text{grad } (g-z)|^2 \text{ est continu sur } \mathcal{D}_Q^{1,\infty} \text{ muni de } \widehat{\text{dist}}.$$

La fonction J est donc s.c.i. sur $\mathcal{D}_Q^{1,\infty}$ muni de $\widehat{\text{dist}}$. Elle atteint son minimum sur le compact \mathcal{D}_{ad} . ■

5.3. DERIVATION DE LA FONCTION COUT

Pour obtenir des résultats de dérivation, on va faire une hypothèse plus forte que (5.1) :

$$(5.16) \left\{ \begin{array}{l} Q \text{ est un ouvert borné connexe de } \mathbb{R}^N \\ f \in L^2(\mathbb{R}^N) , g \in H^2(\mathbb{R}^N) \text{ et } z \in H^2(\mathbb{R}^N) \end{array} \right.$$

THEOREME 5.2

On suppose l'hypothèse (5.16) vérifiée.

i) L'application J définie par (5.4)(5.5) est dérivable de $\mathcal{D}_Q^{1,\infty}$ dans R en tout point D_0 , et l'on a, pour tout $\tau \in W^{1,\infty}(R^N, R^N)$:

$$(5.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial J}{\partial D}(D_0) \cdot \tau = \int_{D_0} |\text{grad}(u(D_0) - z)|^2 \text{div } \tau + \\ + 2 \int_{D_0} \langle \text{grad}(u(D_0) - z), \text{grad} \{Y(\tau) + \langle \text{grad}(g - z), \tau \rangle\} \\ - [\tau'] \text{grad}(u(D_0) - z) \rangle \end{array} \right.$$

où $Y(\tau)$ est la solution unique de :

$$(5.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} Y(\tau) \in H_0^1(D_0) \\ -\Delta Y(\tau) = -\Delta \langle \text{grad}(u(D_0) - g), \tau \rangle \text{ dans } \mathcal{D}'(D_0) \end{array} \right. .$$

ii) Si de plus

$$(5.19) \quad D_0 \text{ est de classe } W^{2,\infty}$$

la dérivée de J se met sous la forme, pour tout $\tau \in W^{1,\infty}(R^N, R^N)$:

$$(5.20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial J}{\partial D}(D_0) \cdot \tau = \int_{\partial D_0} \langle n, \tau \rangle \left\{ -\left| \frac{\partial}{\partial n}(u(D_0) - g) \right|^2 + \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial}{\partial n}(u(D_0) - z) \frac{\partial p(D_0)}{\partial n} - |\text{grad}(g - z)|^2 \right\} \end{array} \right.$$

où l'état adjoint $p(D_0)$ est défini par :

$$(5.21) \quad \left\{ \begin{array}{l} p(D_0) \in H_0^1(D_0) \\ -\Delta(p(D_0)) = -\Delta(u(D_0) - z) = f + \Delta z \text{ dans } \mathcal{D}'(D_0) \end{array} \right. . \quad \blacksquare$$

REMARQUE 5.4

L'identité du Lemme 5.2 montre que sous l'hypothèse (5.16)

$$(5.22) \quad \Delta \langle \text{grad}(u(D_0) - g), \tau \rangle \in H^{-1}(D_0)$$

donc (5.18) a une solution unique. ■

REMARQUE 5.5

i) Sans hypothèse de régularité sur Q , donc sur les domaines de $\mathcal{D}_Q^{1,\infty}$, J est dérivable et sa dérivée est donnée par (5.17).

ii) Sous l'hypothèse (5.19) de régularité de D_0 , la dérivée se met sous la forme (5.20). Cette expression permet de déterminer explicitement les directions de descente τ car

$$\frac{\partial J}{\partial D}(D_0) \cdot \tau = \int_{\partial D_0} \langle n, \tau \rangle \mathcal{F}, \quad \text{où } \mathcal{F} \text{ ne dépend pas de } \tau,$$

alors que l'expression (5.17) ne le permet pas.

Rappelons que le théorème 3.1 montre à priori que, dès que D_0 est de classe C^1 , $\frac{\partial J}{\partial D}(D_0) \cdot \tau$ ne dépend de τ (presque) que par sa trace normale $\langle n, \tau \rangle$. ■

REMARQUE 5.6

Notons que quand D_0 est de classe $W^{2,\infty}$:

- i) $u(D_0)$ et $p(D_0)$ appartiennent à $H^2(D_0)$ et (5.20) a un sens,
- ii) tout élément de $\mathcal{D}_Q^{1,\infty}$ est au moins de classe $W^{1,\infty}$,
- iii) l'application J est dérivable de $\mathcal{D}_Q^{2,\infty}$ dans \mathbb{R} en tout point D , d'après la proposition 3.6, et sa dérivée est donnée pour tout $\tau \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, par (5.20) et (5.21), puisque tout élément de $\mathcal{D}_Q^{2,\infty}$ est de classe $W^{2,\infty}$. ■

PRINCIPE DE LA DEMONSTRATION DU THEOREME 5.2

Nous démontrerons la partie i) du théorème 5.2 en utilisant le théorème 4.1 qui permet de dériver l'application $D \mapsto \int_D \phi(D)$ D_0 , moyennant une hypothèse de dérivabilité de l'application

$$\theta \mapsto \bar{\phi}_{D_0}(\theta) = (\phi((I+\theta)(D_0))) \circ (I+\theta).$$

Nous aurons $\phi(D) = |\text{grad}(u(D)-z)|^2$, et la vérification de l'hypothèse de dérivabilité faite sur $\bar{\phi}_{D_0}$ reposera sur un résultat de dérivabilité du transporté sur le domaine fixe D_0 , de la solution $v(D) = u(D)-g$ du problème homogène. Plus précisément nous montrerons que l'application $\theta \rightarrow \bar{v}_{D_0}(\theta) = (v((I+\theta)(D_0))) \circ (I+\theta)$ est dérivable et que $\frac{\partial \bar{v}_{D_0}}{\partial \theta}(0) \cdot \tau$ est la solution unique $Y(\tau)$ de (5.18).

Nous démontrerons la partie ii) du théorème 5.2 en introduisant un état adjoint qui permet de transformer l'expression de la dérivée donnée par la partie i), et en appliquant la formule de Stokes, qui suppose une certaine régularité de D_0 .

Commençons par étudier la dérivabilité de \bar{v}_{D_0} :

5.4 DERIVATION DU TRANSPORTE SUR UN DOMAINE FIXE DE LA SOLUTION DU PROBLEME HOMOGENE .

Rappelons que si $\theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ avec $\|\theta\|_1 < \frac{1}{2N^2}$, alors $(I+\theta) \in \mathcal{C}^{1,\infty}$ et D_0 étant fixé dans $\mathcal{D}_Q^{1,\infty}$, $(I+\theta)(D_0)$ appartient à $\mathcal{D}_Q^{1,\infty}$. L'équation homogène (5.2) définit alors de façon unique $v((I+\theta)(D_0)) \in H_0^1((I+\theta)(D_0))$, et on définit son transporté sur le domaine fixe D_0 par :

$$(5.23) \quad \bar{v}_{D_0}(\theta) = (v((I+\theta)(D_0))) \circ (I+\theta)$$

qui appartient à $H_0^1(D_0)$ d'après le lemme 4.1 iii).

Notons que $\bar{v}_{D_0}(0) = v(D_0)$.

LEMME 5.1

On fait l'hypothèse (5.16). Pour tout domaine $D_0 \in \mathcal{D}_Q^{1,\infty}$, la fonction \bar{v}_{D_0} définie par (5.23) est dérivable de $W^{1,\infty}(R^N, R^N)$ à valeurs dans $H_0^1(D_0)$, au point 0 et on a, pour tout $\tau \in W^{1,\infty}(R^N, R^N)$:

$$(5.24) \quad \frac{\partial \bar{v}_{D_0}}{\partial \theta}(0) \cdot \tau = Y(\tau)$$

où $Y(\tau)$ est défini par (5.18) (Cf. (5.22)). ■

Avant de démontrer le lemme 5.1, on va vérifier une identité :

LEMME 5.2

Soient D un ouvert de R^N , $\tau \in W^{1,\infty}(R^N, R^N)$ et $v \in H^1(D)$ tel que $\Delta v \in L^2(D)$. On a alors dans $\mathcal{D}'(D)$:

$$(5.25) \quad -\Delta(\langle \text{grad } v, \tau \rangle) = \text{div} \{(-\Delta v) \cdot \tau + \text{div } \tau \cdot \text{grad } v - ([\tau'] + {}^t[\tau']) \cdot \text{grad } v\} \quad \blacksquare$$

DEMONSTRATION DU LEMME 5.2

1) Supposons $v \in C^\infty(D)$ et $\tau \in C^\infty(R^N, R^N)$.

On peut alors développer les deux membres de (5.25) et on vérifie qu'ils sont égaux.

2) Supposons $v \in C^\infty(D)$.

Les applications qui à τ associent les deux membres de (5.25) sont linéaires continues de $L_{loc}^1(R^N, R^N)$ dans $\mathcal{D}'(D)$, et $C^\infty(R^N, R^N)$ étant dense dans $L_{loc}^1(R^N, R^N)$, (5.25) est encore vérifié pour tout

$\tau \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, donc en particulier pour $\tau \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$.

3) Supposons $\tau \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$.

Les applications qui à v associent les deux membres de (5.25) sont linéaires continues de $H^2_{loc}(D)$ dans $\mathcal{D}'(D)$, et $C^\infty(D)$ étant dense dans $H^2_{loc}(D)$, (5.25) est encore vérifiée pour tout $v \in H^2_{loc}(D)$, donc en particulier pour $v \in H^1(D)$ tel que $\Delta v \in L^2(D)$. ■

Démonstration du lemme 5.1.

1) Changement de variable.

La fonction $v((I+\theta)(D_0))$ est solution de l'équation (5.2) relative à $D = (I+\theta)(D_0)$. En faisant le changement de variable $I+\theta$, on en déduit grâce au lemme 4.1, que

$$(5.26) \left\{ \begin{array}{l} \bar{v}_{D_0}(\theta) \in H^1_0(D_0) \\ \int_{D_0} \langle \tau[(I+\theta)']^{-1} \text{grad } \bar{v}_{D_0}(\theta), \tau[(I+\theta)']^{-1} \text{grad } \psi \rangle |\det[(I+\theta)']| \\ = \int_{D_0} ((f+\Delta g) \circ (I+\theta)) \psi |\det[(I+\theta)']|, \quad \forall \psi \in H^1_0(D_0) \end{array} \right.$$

En effet en raison de l'hypothèse (5.16) $f + \Delta g$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^N)$, et d'autre part, quand φ décrit $H^1_0((I+\theta)(D_0))$, $\psi = \varphi \circ (I+\theta)$ décrit $H^1_0(D_0)$.

2) Utilisation du théorème de dérivation de la solution d'une équation implicite.

Définissons une fonction F de $\mathcal{W} \times H^1_0(D_0)$ à valeurs dans

$H^{-1}(D_0)$, où

$$\mathcal{W} = \{ \theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \mid \|\theta\|_1 \leq \frac{1}{2N^2} \}$$

par

$$(5.27) \left\{ \begin{aligned} F(\theta, v) &= - \operatorname{div} \{ |\det[(I+\theta)']| [(I+\theta)']^{-1} \zeta [(I+\theta)']^{-1} \operatorname{grad} v \} \\ &\quad - ((f+\Delta g) \circ (I+\theta)) |\det[(I+\theta)']| \end{aligned} \right.$$

L'équation (5.26) est équivalente à $F(\theta, \bar{v}_{D_0}(\theta)) = 0$,

et si on vérifie que :

$$(5.28) \left\{ \begin{aligned} \text{i)} & \quad F \text{ est dérivable au point } (0, \bar{v}_{D_0}(0)) \\ \text{ii)} & \quad \frac{\partial F}{\partial v}(0, \bar{v}_{D_0}(0)) \text{ est un isomorphisme de } H^1_0(D_0) \text{ sur } H^{-1}(D_0) \\ \text{iii)} & \quad \text{L'application } \bar{v}_{D_0} \text{ est continue de } W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \text{ à valeurs} \\ & \quad \text{dans } H^1_0(D_0) \text{ au point } 0 , \end{aligned} \right.$$

un résultat général de dérivation de la solution d'une équation implicite montre que :

$$(5.29) \left\{ \begin{aligned} & \text{L'application } \bar{v}_{D_0} \text{ est dérivable de } W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \text{ à valeurs} \\ & \text{dans } H^1_0(D_0) \text{ au point } 0 , \text{ et pour tout } \tau \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) , \text{ on a :} \\ & \frac{\partial F}{\partial v}(0, \bar{v}_{D_0}(0)) \cdot \frac{\partial \bar{v}_{D_0}}{\partial \theta}(0) \cdot \tau = - \frac{\partial F}{\partial \theta}(0, \bar{v}_{D_0}(0)) \cdot \tau \end{aligned} \right.$$

3) Vérification de l'hypothèse (5.28) .

Notons $F = F_1 + F_2$, où

$$F_1(\theta) = - ((f+\Delta g) \circ (I+\theta)) |\det[(I+\theta)']|$$

$$F_2(\theta, v) = - \operatorname{div} \{ |\det[(I+\theta)']| [(I+\theta)']^{-1} \zeta [(I+\theta)']^{-1} \operatorname{grad} v \}$$

Point i) Puisque $f+\Delta g \in L^2(\mathbb{R}^N)$, le lemme 4.5 complété par la remarque 4.5 assure que F_1 est dérivable de $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ à valeurs dans $H^{-1}(D_0)$ au point 0 et que l'on a pour tout $\tau \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$

$$(5.30) \quad \frac{\partial F_1}{\partial \theta}(0) \cdot \tau = - \operatorname{div} \{ (f + \Delta g) \tau \}$$

D'autre part, F_2 est dérivable à valeurs dans $H^{-1}(D_0)$,
 puisque l'application

$(\theta, v) \rightarrow |\det [(I+\theta)']| [(I+\theta)']^{-1} \zeta [(I+\theta)']^{-1} \operatorname{grad} v$ est dérivable
 de $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \times H_0^1(D_0)$ à valeurs dans $(L^2(D_0))^N$, au point $(0, v)$,
 d'après les lemmes 4.2 et 4.3, et on a :

$$(5.31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F_2}{\partial v}(0, \bar{v}_{D_0}(0)) \cdot Y = - \Delta Y \quad \forall Y \in H_0^1(D_0) \\ \frac{\partial F_2}{\partial \theta}(0, \bar{v}_{D_0}(0)) \cdot \tau = - \operatorname{div} \{ (\operatorname{div} \tau)(\operatorname{grad} \bar{v}_{D_0}(0)) - ([\tau'] + \zeta[\tau']) \operatorname{grad} \bar{v}_{D_0}(0) \} \\ \forall \tau \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N). \end{array} \right.$$

Point ii)

D'après (5.31) $\frac{\partial F}{\partial v}(0, \bar{v}_{D_0}(0)) = - \Delta$, qui est un isomorphisme de
 $H_0^1(D_0)$ sur $H^{-1}(D_0)$.

Point iii)

Les applications $\theta \rightarrow |\det [(I+\theta)']|$, $\theta \rightarrow [(I+\theta)']^{-1}$ et
 $\theta \rightarrow (f + \Delta g) \circ (I+\theta)$ sont continues de $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ respectivement
 dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{2N})$, $L^2(\mathbb{R}^N)$ au point 0, d'après les lemmes
 4.2, 4.3 et 4.4i). La continuité de la solution d'une équation elliptique,
 ici (5.26), par rapport à ses coefficients et au second membre entraîne
 la continuité de l'application \bar{v}_{D_0} au point 0.

4) Démonstration de (5.24).

L'hypothèse (5.28) est donc vérifiée, ce qui entraîne (5.29).
 Avec (5.30) et (5.31), il vient pour tout $\tau \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$

$$(5.31 \text{ bis}) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{v}_{D_0}}{\partial \theta}(0) \cdot \tau \in H^1(D_0) \\ - \Delta \left(\frac{\partial \bar{v}_{D_0}}{\partial \theta}(0) \cdot \tau \right) = \operatorname{div} \{ (f + \Delta g) \tau + (\operatorname{div} \tau) \operatorname{grad} \bar{v}_{D_0}(0) \\ - ([\tau'] + {}^t[\tau']) \operatorname{grad} \bar{v}_{D_0}(0) \} \quad \text{dans } H^{-1}(D_0) \end{array} \right.$$

L'identité du lemme 5.2 relative à $v = \bar{v}_{D_0}(0) = u(D_0) - g$ montre que, sous l'hypothèse (5.16), le second membre de (5.31 bis) est égal à $\Delta(\langle \operatorname{grad}(u(D_0) - g), \tau \rangle)$, ce qui établit que $\frac{\partial \bar{v}_{D_0}}{\partial \theta}(0) \cdot \tau$ est la solution unique $Y(\tau)$ de (5.18). ■

5.5 DEMONSTRATION DES RESULTATS DE DERIVATION DE LA FONCTION COUT .

Démonstration de la partie i) du théorème 5.2.

Le théorème 4.1, avec $\phi(D) = |\operatorname{grad}(u(D) - z)|^2$ montre que si

$$(5.32) \left\{ \begin{array}{l} \text{l'application } \theta \rightarrow \bar{\phi}_{D_0}(\theta) = |\operatorname{grad}(u((I+\theta)(D_0)) - z)|^2 \circ (I+\theta) \\ \text{est dérivable de } W^{1,\infty}(R^N, R^N) \text{ dans } L^1(D_0) \text{ au point } 0, \end{array} \right.$$

alors l'application J définie par (5.5) est dérivable de $\mathcal{D}_Q^{1,\infty}$ dans R au point 0, et que pour tout $\tau \in W^{1,\infty}(R^N, R^N)$, on a :

$$(5.33) \quad \frac{\partial J}{\partial D}(D_0) \cdot \tau = \int_{D_0} \{ |\operatorname{grad}(u(D_0) - z)|^2 (\operatorname{div} \tau) + \frac{\partial \bar{\phi}_{D_0}}{\partial \theta}(0) \cdot \tau \}$$

Or le lemme 4.1 de changement de variable joint à la définition (5.23) de $\bar{v}_{D_0}(\theta)$ montre que :

$$\bar{\phi}_{D_0}(\theta) = |{}^t[(I+\theta)']^{-1} \operatorname{grad} \{ \bar{v}_{D_0}(\theta) + (g-z) \circ (I+\theta) \}|^2$$

Les lemmes de dérivation 5.1, 4.3 et 4.4 ii), relatif à $g-z \in H^2(R^N)$, montrent que l'hypothèse (5.32) est vérifiée, et que,

pour tout $\tau \in W^{1,\infty}(R^N, R^N)$, on a :

$$(5.34) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{\phi}_{D_0}}{\partial \theta}(0) \cdot \tau = 2 \langle \text{grad}(\bar{v}_{D_0}(0) + g - z), {}^t[\tau'] \text{grad}(\bar{v}_{D_0}(0) + g - z) \\ + \text{grad}\left(\frac{\partial \bar{v}_{D_0}}{\partial \theta}(0) \cdot \tau + \langle \text{grad}(g - z), \tau \rangle \right) \end{array} \right.$$

où $\frac{\partial \bar{v}_{D_0}}{\partial \theta}(0) \cdot \tau$ est la solution unique $Y(\tau)$ de (5.18).

L'application J est donc dérivable de $\mathcal{D}_Q^{1,\infty}$ à valeurs dans R au point D_0 et l'égalité (5.33) complétée par (5.34) et

$$\bar{v}_{D_0}(0) = v(D_0) = u(D_0) - g$$

donne l'expression (5.17) de la dérivée de J . ■

Démonstration de la partie ii) du théorème 5.2.

L'égalité (5.17) de la partie i) du théorème peut s'écrire

$$(5.36) \quad \frac{\partial J}{\partial D}(D_0) \cdot \tau = \int_{D_0} A \, dx$$

où $A \in L^1(D_0)$ est donné par

$$(5.37) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = |\text{grad}(u(D_0) - z)|^2 \text{div } \tau \\ + 2 \langle \text{grad}(u(D_0) - z), \text{grad}\left(\frac{\partial \bar{v}_{D_0}}{\partial \theta}(0) \cdot \tau + \langle \text{grad}(g - z), \tau \rangle \right) \\ - {}^t[\tau'] \text{grad}(u(D_0) - z) \rangle \end{array} \right.$$

Dans une première étape, nous transformerons A sans faire l'hypothèse (5.19) de régularité sur D_0 ; dans une seconde étape, nous en déduirons l'expression (5.20) de la dérivée de J , en utilisant la formule de Stokes, ce qui exige de la régularité sur D_0 .

1) Transformation de A

Décomposons $\frac{\partial \bar{v}_{D_0}}{\partial \theta}(0) \cdot \tau$ en (1)

$$(5.38) \quad \frac{\partial \bar{v}_{D_0}}{\partial \theta}(0) \cdot \tau = U(\tau) + \langle \text{grad}(u(D_0) - g), \tau \rangle$$

L'équation (5.4) montre que $u(D_0)$ appartient à $H_{loc}^2(D_0) \cap H^1(D_0)$, puisque $f \in L^2(D_0)$, et comme $g \in H^2(D_0)$, (5.38) définit pour tout $\tau \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ un élément

$$(5.39) \quad U(\tau) \in H_{loc}^1(D_0) \cap L^2(D_0).$$

Comme $\frac{\partial \bar{v}_{D_0}}{\partial \theta}(0) \cdot \tau$ est la solution de (5.18), on a :

$$(5.40) \quad U(\tau) + \langle \text{grad}(u(D_0) - g), \tau \rangle \in H_{loc}^1(D_0)$$

$$(5.41) \quad \Delta(U(\tau)) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(D_0).$$

La décomposition (5.38) permet d'écrire A sous la forme :

$$(5.42) \quad A = 2 \langle \text{grad}(u(D_0) - z), \text{grad } U(\tau) \rangle + B$$

où

$$(5.43) \quad \begin{cases} B = |\text{grad}(u(D_0) - z)|^2 \text{div } \tau \\ + 2 \langle \text{grad}(u(D_0) - z), \text{grad}(\langle \text{grad}(u(D_0) - z), \tau \rangle) \rangle \\ - 2 \langle \text{grad}(u(D_0) - z), {}^t[\tau] \text{grad}(u(D_0) - z) \rangle \end{cases}$$

Comme $u(D_0)$ appartient à $H_{loc}^2(D_0)$, chaque terme du second membre est défini dans $L_{loc}^1(D_0)$, et on vérifie que :

$$(5.44) \quad B = \text{div} \{ |\text{grad}(u(D_0) - z)|^2 \tau \}.$$

(1) Nous verrons au paragraphe 5.7 que les restrictions de $u(D)$ aux ouverts strictement inclus dans D_0 sont dérivables par rapport à D au point D_0 et ont pour dérivées les restrictions de $U(\tau)$. On peut donc dire que $U(\tau)$ est la dérivée (en un sens local) de $u(D)$ par rapport à D au point D_0 .

D'autre part dans $L^1_{loc}(D_0)$ on a :

$$(5.45) \left\{ \begin{aligned} \operatorname{div}\{U(\tau) \operatorname{grad}(u(D_0)-z)\} &= U(\tau) \Delta(u(D_0)-z) \\ &+ \langle \operatorname{grad}(u(D_0)-z), \operatorname{grad} U(\tau) \rangle \end{aligned} \right.$$

L'état adjoint $p(D_0)$ défini par (5.21) appartient à $H^1_0(D_0) \cap H^2_{loc}(D_0)$, et on a dans $L^1_{loc}(D_0)$, compte-tenu de (5.41) :

$$(5.46) \left\{ \begin{aligned} -U(\tau) \Delta(u(D_0)-z) &= -U(\tau) \Delta p(D_0) \\ &= \operatorname{div}\{p(D_0) \operatorname{grad} U(\tau) - U(\tau) \operatorname{grad} p(D_0)\} \end{aligned} \right.$$

Si l'on pose

$$(5.47) \left\{ \begin{aligned} M(\tau) &= 2 U(\tau) \operatorname{grad}(u(D_0)-z-p(D_0)) \\ &+ 2 p(D_0) \operatorname{grad} U(\tau) + |\operatorname{grad}(u(D_0)-z)|^2 \tau \end{aligned} \right.$$

les égalités (5.42) à (5.46) montrent que l'on a

$$A = \operatorname{div} M(\tau).$$

Il résulte alors de (5.36) que :

$$(5.48) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial D}(D_0) \cdot \tau &= \int_{D_0} \operatorname{div} M(\tau) \\ \text{où } M(\tau) &\text{ est défini par (5.47) et appartient à} \\ &(L^1(D_0) \cap W^{1,1}_{loc}(D_0))^N \text{ et } \operatorname{div} M(\tau) \in L^1(D_0), \text{ et où } U(\tau), \\ &\text{qui intervient dans (5.47) est défini de façon unique par} \\ &(5.39), (5.40) \text{ et (5.41).} \end{aligned} \right.$$

2) Utilisation de la formule de Stokes

Faisons maintenant l'hypothèse (5.19) de régularité sur D_0 . Alors $u(D_0)$ et $p(D_0)$ appartiennent à $H^2(D_0)$, $U(\tau)$ appartient à $H^1(D_0)$ et $M(\tau)$ appartient à $(W^{1,1}(D_0))^N$. Nous pouvons donc appliquer la formule de Stokes dans (5.48), ce qui donne :

$$(5.49) \quad \frac{\partial J}{\partial D}(D_0) \cdot \tau = \int_{\partial D_0} \langle n, M(\tau) \rangle ds$$

On a $u(D_0) - g \in H^2(D_0) \cap H^1(D_0)$, d'où

$$(5.50) \quad \text{grad}(u(D_0) - g) = n \frac{\partial}{\partial n}(u(D_0) - g) \text{ sur } \partial D_0$$

et avec (5.40), il vient :

$$(5.51) \quad U(\tau) = - \langle n, \tau \rangle \frac{\partial}{\partial n}(u(D_0) - g) \text{ sur } \partial D_0 .$$

Enfin, on montre grâce à (5.50) que sur ∂D_0 , on a :

$$(5.52) \quad |\text{grad}(u(D_0) - z)|^2 = \frac{\partial}{\partial n}(u(D_0) - g) \frac{\partial}{\partial n}(u(D_0) + g - 2z) + |\text{grad}(g - z)|^2 .$$

En utilisant la définition (5.47) de $M(\tau)$, les égalités (5.50), (5.51) et (5.52) et le fait que $p(D_0) = 0$ sur ∂D_0 , on montre que :

$$\langle n, M(\tau) \rangle = \langle n, \tau \rangle \left\{ \frac{\partial}{\partial n}(u(D_0) - g) \frac{\partial}{\partial n}(-u(D_0) + g + 2p(D_0)) + |\text{grad}(g - z)|^2 \right\}$$

ce qui, avec (5.49), établit l'égalité (5.20). \blacksquare

5.6 VARIANTE RELATIVE A UNE FONCTION COUT DEFINIE PAR UNE INTEGRALE SUR LE BORD DU DOMAINE .

Nous allons dans ce paragraphe faire une hypothèse plus forte que

(5.1). On supposera que :

$$(5.53) \quad \begin{cases} Q \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}^N, \text{ borné, connexe de classe } W^{2,\infty} \\ f \in L^2(\mathbb{R}^N), g \in H^2(\mathbb{R}^N) \text{ et } z \in H^1(\mathbb{R}^N) \end{cases}$$

Tout domaine D de $\mathcal{D}_Q^{2,\infty}$ est alors de classe $W^{2,\infty}$, et la solution $u(D)$ du problème de Dirichlet non homogène (5.4) appartient à $H^2(D)$.

On définit une nouvelle fonction coût par :

$$(5.54) \quad J_1(D) = \int_{\partial D} \left| \frac{\partial u(D)}{\partial n} - z \right|^2 .$$

REMARQUE 5.7

La fonctionnelle J_1 est d'ordre $3/2$, en ce sens que l'application $u \rightarrow \int_{\partial D} \left| \frac{\partial u}{\partial n} - z \right|^2$ est définie sur $H^{3/2+\epsilon}(D)$, $\epsilon > 0$, D étant supposé

régulier ; comme nous faisons des hypothèses de régularité d'ordre entier, nous la traiterons comme une fonctionnelle d'ordre 2 .

On pourrait remplacer dans la définition de J_1 l'expression $\frac{\partial u}{\partial n} - z = \langle n, \text{grad } u \rangle - z$ par d'autres expressions différentielles d'ordre 1, ou encore remplacer J_1 par une fonctionnelle intégrale sur D relative à une expression différentielle d'ordre 2 .

On traiterait le cas de fonctionnelles d'ordre plus élevé en renforçant encore les hypothèses de régularité, le principe des démonstrations restant le même.

Notons enfin que la fonctionnelle J_1 présente la particularité que les coefficients de l'opérateur différentiel $\frac{\partial}{\partial n} = \langle n, \text{grad} \rangle$ dépendent du domaine D . ■

5.6.1 Existence d'un domaine optimalTHEOREME 5.3

On fait l'hypothèse (5.53) et on se donne

$$(5.55) \left\{ \begin{array}{l} D_{ad} \text{ un sous ensemble de } \mathcal{D}_Q^{2,\infty}, \text{ borné pour la pseudo-distance} \\ d_{2,\infty} \text{ et fermé pour la pseudo-distance } d_{1,\bar{c}} . \end{array} \right.$$

Alors il existe un domaine optimal D_0 , i.e tel que

$$D_0 \in \mathcal{Q}_{ad} \quad , \quad J_1(D_0) \leq J_1(D) \quad \forall D \in \mathcal{Q}_{ad} . \quad \blacksquare$$

Notons que l'hypothèse (5.55) est en particulier vérifiée si \mathcal{D}_{ad} est un compact de $\mathcal{D}_Q^{2,\infty}$.

REMARQUE 5.8

On va démontrer ce théorème en se ramenant sur l'ouvert fixe Q par changement de variable. On pourrait établir pour cette méthode un résultat d'existence d'un domaine optimal pour la fonction coût J étudiée aux paragraphes précédents, en supposant

$$\mathcal{D}_{ad} \text{ sous ensemble compact de } \mathcal{D}_Q^{1,\infty}.$$

Cette hypothèse est plus forte que l'hypothèse (5.7) du théorème 5.1, qu'on a démontré en utilisant une méthode de prolongement ; par contre, l'hypothèse (5.6) de régularité sur Q ne serait plus nécessaire. ■

Démonstration du théorème 5.3

Nous allons montrer que :

$$(5.56) \begin{cases} J_1 \text{ est continue sur les } d_{2,\infty} \text{ bornés de } \mathcal{D}_Q^{2,\infty} \text{ munis de la} \\ \text{pseudo distance } d_{1,\bar{c}} \end{cases}$$

ce qui entraîne que J_1 atteint son minimum sur \mathcal{D}_{ad} qui est compact pour $d_{1,\bar{c}}$ d'après le théorème 2.4.

Soit donc $\{D_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, une suite $d_{2,\infty}$ bornée de $\mathcal{D}_Q^{2,\infty}$ convergeant vers un domaine $D_0 \in \mathcal{D}_Q^{2,\infty}$ pour la pseudo distance $d_{1,\bar{c}}$. Il résulte de la démonstration ⁽¹⁾ du théorème 2.4 que l'on peut extraire une sous suite, notée $\{D_m\}$, telle que

(1) Il faut considérer les transformations \hat{T}_m introduites dans la démonstration du théorème 2.4.

$$(5.57) \left\{ \begin{array}{l} D_m = T_m(Q) \quad D_o = T_o(Q) \quad \text{où} \quad T_m, T_o \in \mathcal{C}^{2,\infty} \\ \|T_m - T_o\|_2 + \|T_m^{-1} - T_o^{-1}\|_2 \leq C \\ \|T_m - T_o\|_1 + \|T_m^{-1} - T_o^{-1}\|_1 \rightarrow 0 \quad \text{si } m \rightarrow +\infty \end{array} \right.$$

1) Continuité du transporté de l'état sur le domaine fixe Q.

La fonction $v(D_m)$ est solution de l'équation homogène (5.2) sur la domaine $D_m = T_m(Q)$. En faisant le changement de variable T_m , on en déduit, grâce au lemme 4.1, que :

$$(5.58) \left\{ \begin{array}{l} v(D_m) \circ T_m \in H_o^1(Q) \\ \int_Q \langle {}^t [T'_m]^{-1} \text{grad}(v(D_m) \circ T_m), {}^t [T'_m]^{-1} \text{grad} \psi \rangle |\det [T'_m]| = \\ = \int_Q ((f+\Delta g) \circ T_m) \psi |\det [T'_m]| \quad \forall \psi \in H_o^1(Q) \end{array} \right.$$

Il résulte des lemmes 4.2, 4.3 et 4.4 que

$$(5.59) \left\{ \begin{array}{l} {}^t [T'_m]^{-1} \rightarrow {}^t [T'_o]^{-1} \text{ dans } L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{2N}) \\ |\det [T'_m]| \rightarrow |\det [T'_o]| \text{ dans } L^\infty(\mathbb{R}^N) \end{array} \right.$$

$$(5.60) \quad (f+\Delta g) \circ T_m \rightarrow (f+\Delta g) \circ T_o \text{ dans } L^2(Q)$$

La continuité de la solution d'une équation elliptique, ici

(5.58), par rapport à ses coefficients et au second membre, entraîne que :

$$v(D_m) \circ T_m \rightarrow v(D_o) \circ T_o \text{ dans } H_o^1(Q)$$

L'équation (5.58) est uniformément elliptique en m et on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \| {}^t [T'_m]^{-1} \|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{2N})} \leq C \quad \forall m \\ |\det [T'_m]|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N)} \leq C \quad \forall m \\ \| (f+\Delta g) \circ T_m \|_{L^2(Q)} \leq C \quad \forall m \end{array} \right.$$

Comme Q est un ouvert borné de classe $W^{2,\infty}$, la suite $v(D_m) \circ T_m$ est bornée dans $H^2(Q)$, et donc :

$$(5.61) \quad v(D_m) \circ T_m \rightarrow v(D_0) \circ T_0 \text{ dans } H^2(Q) \text{ faible.}$$

2) Continuité de J .

On a, en notant $n(D)$ la normale extérieure à ∂D ,

$$J(D_m) = \int_{\partial D_m} | \langle n(D_m), \text{grad } v(D_m) + \text{grad } g \rangle - z |^2 ds$$

et en effectuant le changement de variable T_m , qui appartient à $\mathcal{C}^{1,\bar{c}}$, il vient d'après les lemmes 4.1, 4.7 et 4.8

$$J(D_m) = \int_{\partial D_m} \left| \langle \frac{[T'_m]^{-1} n(Q)}{|[T'_m]^{-1} n(Q)|_{\mathbb{R}^N}}, [T'_m]^{-1} \text{grad}(v(D_m) \circ T_m) - (\text{grad } g) \circ T_m \rangle - z \circ T_m \right|^2 \times | \det [T'_m] | | [T'_m]^{-1} n(Q) |_{\mathbb{R}^N} ds$$

Les résultats de convergence (5.59) ont également lieu dans $L^\infty(\partial Q)$ puisque les fonctions T_m et T_0 appartiennent à $C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$; de plus

$$| [T'_m]^{-1} n(Q) |_{\mathbb{R}^N} \geq \frac{1}{\| [T'_m] \|_{L^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^{2N})}} \quad \text{pp. sur } \partial Q$$

et enfin d'après (5.61) et le lemme de continuité 4.4 i)

$$\text{grad}(v(D_m) \circ T_m) \rightarrow \text{grad}(v(D_0) \circ T_0) \text{ dans } L^2(\partial Q) \text{ fort}$$

$$(\text{grad } g) \circ T_m \rightarrow (\text{grad } g) \circ T_0 \text{ dans } L^2(\partial Q) \text{ fort}$$

$$z \circ T_m \rightarrow z \circ T_0 \text{ dans } L^2(\partial Q) \text{ fort}$$

ce qui entraîne que $J(D_m) \rightarrow J(D_0)$.

Cette convergence a lieu pour toute la suite $\{D_n\}$, ce qui établit (5.56) et donc le théorème. ■

5.6.2 Dérivation de la fonction coût

Pour obtenir des résultats de dérivation on va faire une hypothèse plus forte que (5.53),

$$(5.62) \left\{ \begin{array}{l} Q \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}^N, \text{ borné, connexe, de classe } W^{2,\infty} \\ f \in H^1(\mathbb{R}^N), g \in H^3(\mathbb{R}^N) \text{ et } z \in H^2(\mathbb{R}^N) \end{array} \right.$$

THEOREME 5.4

On fait l'hypothèse (5.62).

i) La fonction J_1 définie par (5.54) est dérivable de $\mathcal{D}_Q^{2,\infty}$ à valeurs dans \mathbb{R} en tout point D_0 , et on a pour tout $\tau \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$

$$(5.63) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial J_1}{\partial D}(D_0) \cdot \tau = \int_{\partial D_0} \left(\frac{\partial u(D_0)}{\partial n} - z \right)^2 (\operatorname{div} \tau - \langle [\tau'] n, n \rangle) ds \\ + 2 \int_{\partial D_0} \left(\frac{\partial u(D_0)}{\partial n} - z \right) \left\{ \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial \bar{v}_{D_0}}{\partial \theta}(0) \cdot \tau + \langle \operatorname{grad} g, \tau \rangle \right) - \langle \tau, \operatorname{grad} z \rangle \right. \\ \left. + \langle n, [\tau'] n \rangle \frac{\partial u(D_0)}{\partial n} - \langle ([\tau'] + \zeta[\tau']) n, \operatorname{grad} u(D_0) \rangle \right\} ds \end{array} \right.$$

où $\frac{\partial \bar{v}_{D_0}}{\partial \theta}(0) \cdot \tau$ est la solution unique de (5.18).

ii) Si de plus

$$(5.64) \quad D_0 \text{ est de classe } W^{3,\infty}$$

La dérivée de J_1 se met sous la forme, pour tout $\tau \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$:

$$(5.65) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial J_1}{\partial D}(D_0) \cdot \tau &= \int_{\partial D_0} \langle n, \tau \rangle \{ 2 \langle \text{grad } u(D_0), \text{grad } p_1(D_0) \rangle \\ &+ 2 \frac{\partial p_1(D_0)}{\partial n} \left(\frac{\partial g}{\partial n} - 2 \frac{\partial u(D_0)}{\partial n} \right) \\ &- \left(\frac{\partial u(D_0)}{\partial n} - z \right) \left[H \left(\frac{\partial u(D_0)}{\partial n} + z \right) + 2 \left(\frac{\partial z}{\partial n} + f \right) \right] \} ds \end{aligned} \right.$$

où H est la courbure moyenne de ∂D_0 définie au paragraphe 4.3.4,

et où l'état adjoint $p_1(D_0)$ est défini par :

$$(5.66) \quad \left\{ \begin{aligned} p_1(D_0) &\in H^1(D_0) \\ -\Delta p_1(D_0) &= 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(D_0) \\ p_1(D_0) &= \frac{\partial u(D_0)}{\partial n} - z \text{ sur } \partial D_0 \end{aligned} \right. \quad \blacksquare$$

REMARQUE 5.9

i) le lemme 5.2 montre que sous l'hypothèse (5.62) on a :

$$(5.67) \quad \Delta(\langle \text{grad}(u(D_0)) - z, \tau \rangle) \in L^2(D_0)$$

Comme D_0 est de classe $W^{2,\infty}$, l'équation (5.18) montre que

$$Y(\tau) = \frac{\partial \bar{v}_{D_0}}{\partial \theta}(0) \cdot \tau \text{ appartient à } H^2(D_0), \text{ et (5.63) a donc un sens.}$$

ii) Quand D_0 est de classe $W^{3,\infty}$, $u(D_0)$ appartient à $H^3(D_0)$,

donc $\frac{\partial u}{\partial n} \in H^{3/2}(\partial D_0)$ et $p(D_0) \in H^2(D_0)$, de sorte que (5.65) a

un sens. \blacksquare

REMARQUE 5.10

Quand D_0 est assez régulier on obtient, comme dans l'étude de J , une expression de la dérivée de J_1 qui permet de déterminer les directions de descente. ■

Nous allons démontrer le théorème 5.4 en utilisant le même principe de démonstration que pour le théorème 5.2, principe exposé à la fin du paragraphe 5.3. La fonctionnelle étudiée ici étant d'ordre plus élevé, nous allons commencer par établir un résultat de dérivation de \bar{v}_{D_0} plus fort que celui du lemme 5.1.

5.6.3 Dérivation du transporté sur un domaine fixe de la solution du problème homogène.

LEMME 5.3

On fait l'hypothèse (5.62). Pour tout domaine $D_0 \in \mathcal{D}_Q^{2,\infty}$, l'application \bar{v}_{D_0} définie par (5.23) est dérivable de $W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ à valeurs dans $H^2(D_0) \cap H_0^1(D_0)$ au point 0, et on a, pour tout $\tau \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$:

$$(5.68) \quad \frac{\partial \bar{v}_{D_0}}{\partial \theta}(0) \cdot \tau = Y(\tau)$$

où $Y(\tau)$ est défini par (5.18). ■

Notons que, cf remarque 5.9, la solution de (5.18) appartient ici à $H^2(D_0)$.

Démonstration du lemme 5.3

Reprenons la démonstration du lemme 5.1. L'équation (5.26) montre que, sous l'hypothèse (5.62), $\bar{v}_{D_0}(\theta)$ appartient à $H^2(D_0) \cap H_0^1(D_0)$.

Nous allons considérer ici la fonction F définie par (5.27) comme une fonction définie dans $\mathcal{W}_2 \times (H^2(D_0) \cap H^1_0(D_0))$, à valeurs dans

$L^2(D_0)$, où

$$\mathcal{W}_2 = \{ \theta \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \mid \|\theta\|_2 \leq \frac{1}{2\sqrt{2N^5}} \}$$

On a les trois résultats suivants :

i) F est dérivable au point $(0, \bar{v}_{D_0}(0))$, d'après les lemmes de dérivation 4.2, 4.3, et 4.4 ii).

ii) $\frac{\partial F}{\partial v}(0, \bar{v}_{D_0}(0)) = -\Delta$ est un isomorphisme de $H^2(D_0) \cap H^1_0(D_0)$ sur $L^2(D_0)$.

iii) L'application \bar{v}_{D_0} est continue de $W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ à valeurs dans $H^2(D_0) \cap H^1_0(D_0)$ au point 0, d'après les lemmes 4.2, 4.3 et 4.4 i, car la solution d'une équation elliptique dépend continûment des coefficients et du second membre dans les espaces appropriés.

Le théorème de dérivation de la solution d'une équation implicite, ici $F(\theta, \bar{v}_{D_0}(\theta)) = 0$, assure alors que l'application \bar{v}_{D_0} est dérivable de $W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ dans $H^2(D_0) \cap H^1_0(D_0)$ au point zéro. La dérivée est alors donnée, pour tout $\tau \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, par (5.18). ■

5.6.4 Démonstration des résultats de dérivation de la fonction coût.

Démonstration de la partie i) du théorème 5.4.

Le théorème 4.3 avec $\phi(D) = \left| \frac{\partial u(D)}{\partial n} - z \right|^2 = \left| \langle n(D), \text{grad } u(D) \rangle - z \right|^2$

montre que si

$$(5.69) \left\{ \begin{array}{l} \theta \rightarrow \bar{\phi}_{D_0}(\theta) = \left\{ \left| \langle n((I+\theta)(D_0)), \text{grad}(u((I+\theta)(D_0))) \rangle - z \right|^2 \right\} \circ (I+\theta) \\ \text{est dérivable de } W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \text{ à valeurs dans } L^1(\partial D_0) \\ \text{au point } 0, \end{array} \right.$$

l'application J_1 est dérivable de $\mathcal{D}_Q^{2,\infty}$ à valeurs dans R au point 0, et l'on a, pour tout $\tau \in W^{2,\infty}(R^N, R^N)$

$$(5.70) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial J_1}{\partial D}(D_0) \cdot \tau &= \int_{\partial D_0} \left\{ | \langle n(D_0), \text{grad } u(D_0) \rangle - z |^2 (\text{div } \tau - \langle [\tau'] n, n \rangle) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \bar{\phi}_{D_0}}{\partial \theta}(0) \cdot \tau \right\} ds \end{aligned} \right.$$

Or les lemmes de changement de variable 4.1 ii), et 4.8, et la définition (5.23) de $\bar{v}_{D_0}(\theta)$ montrent que :

$$\bar{\phi}_{D_0}(\theta) = \int_{R^N} \left\langle \frac{t [(I+\theta)']^{-1} n(D_0)}{|t [(I+\theta)']^{-1} n(D_0)|}, [(I+\theta)']^{-1} \text{grad}(\bar{v}_{D_0}(\theta) + g \circ (I+\theta)) - z \circ (I+\theta) \right\rangle^2$$

Les lemmes de dérivation 4.3, 4.4 ii) et 5.3 montrent alors que la propriété (5.69) est vérifiée, et que, pour tout $\tau \in W^{2,\infty}(R^N, R^N)$,

on a :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \bar{\phi}_{D_0}}{\partial \theta}(0) \cdot \tau &= 2 \left\{ \langle n(D_0), \text{grad}(\bar{v}_{D_0}(0) + g) \rangle - z \right\} \times \\ &\times \left\{ \langle (-t [\tau'] n(D_0) + \langle t [\tau'] n(D_0), n(D_0) \rangle n(D_0)), \text{grad}(\bar{v}_{D_0}(0) + g) \rangle \right. \\ &+ \langle n(D_0), (t - [\tau'] \text{grad}(\bar{v}_{D_0}(0) + g) + \text{grad}(\frac{\partial \bar{v}_{D_0}}{\partial \theta}(0) \cdot \tau + \langle \text{grad } g, \tau \rangle)) \rangle \\ &\left. - \langle \text{grad } z, \tau \rangle \right\} \end{aligned} \right.$$

En notant que

$$\bar{v}_{D_0}(0) = v(D_0) = u(D_0) - g$$

il vient

$$(5.71) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \bar{\phi}_{D_0}}{\partial \theta}(0) \cdot \tau &= 2 \left\{ \frac{\partial u(D_0)}{\partial n} - z \right\} \times \\ &\times \left\{ \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial \bar{v}_{D_0}}{\partial \theta}(0) \cdot \tau + \langle \text{grad } g, \tau \rangle \right) + \langle n, [\tau'] n \rangle \frac{\partial u(D_0)}{\partial n} \right. \\ &\left. - \langle ([\tau'] + t [\tau']) n, \text{grad } u(D_0) \rangle - \langle \text{grad } z, \tau \rangle \right\} \end{aligned} \right.$$

L'application J_1 est donc dérivable de $\mathcal{D}_Q^{2,\infty}$ à valeurs dans R au point D_0 , et (5.70), complété par (5.71), donne l'expression (5.63) de la dérivée de J_1 . ■

Pour démontrer la partie ii) du théorème 5.4, nous utiliserons une identité :

LEMME 5.4

Soit D un ouvert de R^N , localement graphe lipschitzien, et soient τ , p et v tels que

$$\tau \in W^{2,\infty}(R^N, R^N), \quad p \in H^2(D), \quad v \in H^2(D) \quad \text{avec} \quad \Delta v \in H^1(D).$$

On a alors

$$\operatorname{div} \{p \operatorname{grad}(\langle \operatorname{grad} v, \tau \rangle)\} \in L^1(D)$$

et

$$\int_D \operatorname{div} \{p \operatorname{grad}(\langle \operatorname{grad} v, \tau \rangle)\} = \int_{\partial D} \langle n, \tau \rangle \{ \langle \operatorname{grad} v, \operatorname{grad} p \rangle + \Delta v p \} + \\ + \int_{\partial D} \{ p \langle n, ([\tau'] + {}^t[\tau']) \operatorname{grad} v \rangle - \frac{\partial v}{\partial n} (p \operatorname{div} \tau + \langle \tau, \operatorname{grad} p \rangle) \}$$

où n est la normale extérieure à D . ■

Démonstration du lemme 5.4

Si $v \in H^2(D)$ avec $\Delta v \in H^1(D)$, v appartient à $H_{loc}^3(D)$.

On vérifie alors, en développant chacun des termes, que dans $L_{loc}^1(D)$, on a :

$$\operatorname{div} \{p \operatorname{grad}(\langle \operatorname{grad} v, \tau \rangle)\} = \operatorname{div} \{ (\langle \operatorname{grad} v, \operatorname{grad} p \rangle + \Delta v p) \tau \} \\ + \operatorname{div} \{ p ([\tau'] + {}^t[\tau']) \operatorname{grad} v - (p \operatorname{div} \tau + \langle \tau, \operatorname{grad} p \rangle) \operatorname{grad} v \}$$

Le lemme 5.4 en résulte immédiatement. ■

Démonstration de la partie ii) du théorème 5.4

On effectue, comme dans la démonstration de la partie ii) du théorème 5.2, la décomposition

$$(5.72) \quad \frac{\partial \bar{v}_{D_0}}{\partial \theta}(0) \cdot \tau = U(\tau) + \langle \text{grad}(u(D_0)) - g, \tau \rangle$$

Rappelons que l'on a (cf(5.41) et (5.51)), puisque D_0 est de classe $W^{2,\infty}$,

$$(5.73) \quad \Delta U(\tau) = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(D_0)$$

$$(5.74) \quad U(\tau) = - \langle n, \tau \rangle \frac{\partial}{\partial n}(u(D_0) - g) \quad \text{sur} \quad \partial D_0$$

Quand D_0 est de classe $W^{3,\infty}$, $u(D_0)$ appartient à $H^3(D_0)$ et $\frac{\partial \bar{v}_{D_0}}{\partial \theta}(0) \cdot \tau$ appartient à $H^2(D_0)$, donc $U(\tau)$ appartient à $H^2(D_0)$ et $\frac{\partial U(\tau)}{\partial n}$ à $L^2(\partial D_0)$.

En utilisant l'état adjoint $p_1(D_0)$ défini par (5.66), qui appartient à $H^2(D_0)$, on peut écrire (5.63) sous la forme :

$$(5.75) \quad \frac{\partial J_1}{\partial D}(D_0) \cdot \tau = \int_{\partial D_0} (A_1 + A_2 + A_3 + A_4) ds$$

où

$$\left\{ \begin{aligned} A_1 &= \left\{ \left(\frac{\partial u(D_0)}{\partial n} - z \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial u(D_0)}{\partial n} - z \right) \cdot \frac{\partial u(D_0)}{\partial n} \right\} \cdot \{ \text{div} \tau - \langle [\tau'] n, n \rangle \} \\ &= - \{ (p_1(D_0))^2 + 2 p_1(D_0) z \} \cdot \{ \text{div} \tau - \langle [\tau'] n, n \rangle \} \\ A_2 &= 2 \left(\frac{\partial u(D_0)}{\partial n} - z \right) \frac{\partial U(\tau)}{\partial n} = 2 p_1(D_0) \frac{\partial U(\tau)}{\partial n} \\ A_3 &= 2 \left(\frac{\partial u(D_0)}{\partial n} - z \right) \left\{ \frac{\partial u(D_0)}{\partial n} (\text{div} \tau - \langle [\tau'] n, n \rangle) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial n} (\langle \text{grad} u(D_0), \tau \rangle) + \langle n, [\tau'] n \rangle \frac{\partial u(D_0)}{\partial n} \right. \\ &\quad \left. - \langle ([\tau'] + {}^t[\tau']) n, \text{grad} u(D_0) \rangle \right\} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} &= 2 p_1(D_0) \left\{ \frac{\partial}{\partial n} \langle \text{grad } u(D_0), \tau \rangle + \text{div } \tau \frac{\partial u(D_0)}{\partial n} \right. \\ &\quad \left. - \langle ([\tau'] + \tau[\tau'])n, \text{grad } u(D_0) \rangle \right\} \\ (5.76) \quad A_4 &= -2 \left(\frac{\partial u(D_0)}{\partial n} - z \right) \langle \tau, \text{grad } z \rangle \end{aligned} \right.$$

Le lemme d'intégration par parties 4.9, avec

$$f = - \{ (p_1(D_0))^2 + 2 p_1(D_0) z \} \in W^{2,1}(D_0), \text{ montre que}$$

$$(5.77) \left\{ \begin{aligned} \int_{\partial D_0} A_1 ds &= \int_{\partial D_0} \langle \tau, 2(p_1(D_0) + z) \text{grad } p_1(D_0) + 2 p_1(D_0) \text{grad } z \rangle \\ &\quad - \int_{\partial D_0} \langle n, \tau \rangle \left\{ 2(p_1(D_0) + z) \frac{\partial p_1(D_0)}{\partial n} + 2 p_1(D_0) \frac{\partial z}{\partial n} \right. \\ &\quad \left. + H p_1(D_0) (p_1(D_0) + 2z) \right\} \\ &= \int_{\partial D_0} 2 \frac{\partial u(D_0)}{\partial n} \langle \tau, \text{grad } p_1(D_0) \rangle + 2 \left(\frac{\partial u(D_0)}{\partial n} - z \right) \langle \tau, \text{grad } z \rangle \\ &\quad - \int_{\partial D_0} \langle n, \tau \rangle \left\{ 2 \frac{\partial u(D_0)}{\partial n} \frac{\partial p_1(D_0)}{\partial n} + 2 \left(\frac{\partial u(D_0)}{\partial n} - z \right) \frac{\partial z}{\partial n} \right. \\ &\quad \left. + H \left(\left| \frac{\partial u(D_0)}{\partial n} \right|^2 - |z|^2 \right) \right\} \end{aligned} \right.$$

D'autre part, la formule de Green donne, puisque $\Delta U(\tau) = \Delta p_1(D_0) = 0$,

$$(5.78) \left\{ \begin{aligned} \int_{\partial D_0} A_2 ds &= 2 \int_{\partial D_0} U(\tau) \frac{\partial p_1(D_0)}{\partial n} + 2 \int_{D_0} p_1(D_0) \Delta U(\tau) - U(\tau) \Delta p_1(D_0) \\ &= -2 \int_{\partial D_0} \langle n, \tau \rangle \frac{\partial}{\partial n} (u(D_0) - g) \frac{\partial p_1(D_0)}{\partial n} \end{aligned} \right.$$

Enfin, le lemme 5.4 donne, puisque $\Delta u(D_0) = -f$

et

$$\int_{\partial D_0} p_1(D_0) \frac{\partial}{\partial n} \langle \text{grad } u(D_0), \tau \rangle = \int_{D_0} \text{div} \{ p_1(D_0) \text{grad} \langle \text{grad } u(D_0), \tau \rangle \},$$

$$(5.79) \left\{ \begin{aligned} \int_{\partial D_0} A_3 ds &= 2 \int_{\partial D_0} \langle n, \tau \rangle \{ \langle \text{grad } u(D_0), \text{grad } p_1(D_0) \rangle - f p_1(D_0) \} \\ &- 2 \int_{\partial D_0} \frac{\partial u(D_0)}{\partial u} \langle \tau, \text{grad } p_1(D_0) \rangle \end{aligned} \right.$$

Les égalités (5.76) à (5.79) montrent que le second membre de (5.75) est égal à celui de (5.65). C'est ce qu'il fallait démontrer. ■

5.7 COMPLÉMENTS SUR LA DERIVATION DE L'ÉTAT.

APPLICATIONS A L'ETUDE DE PROBLEMES OU LA FONCTION COUT EST DEFINIE PAR UNE INTEGRALE SUR UN DOMAINE FIXE.

Nous allons étudier dans ce paragraphe la dérivation de restrictions de l'état à un ouvert fixe, puis celle d'un prolongement de l'état à \mathbb{R}^N tout entier. Ces deux compléments indiquent que $U(\tau)$, que nous avons introduit en (5.38), est la dérivée de l'état par rapport au domaine.

Nous donnerons, à la fin de ce paragraphe, des applications de ces résultats de dérivation à des fonctionnelles définies par une intégrale sur un domaine fixe.

5.7.1 Dérivation de restrictions de l'état

Soient D_0 et A deux ouverts de \mathbb{R}^N tels que

$$(5.80) \quad D_0 \in \mathcal{D}_Q^{1,\infty}, \quad \bar{A} \subset D_0$$

En utilisant le théorème 2.3 ii) on montre que, pour tout domaine

$D \in \mathcal{D}_Q^{1,\infty}$ tel que $d_{1,\infty}(D, D_0)$ soit assez petit, on a :

$$(5.81) \quad \bar{A} \subset D$$

de sorte que la restriction de l'état à A , $u(D)|_A$, est définie.

LEMME 5.5

i) On fait l'hypothèse (5.16). Pour tout domaine D_0 et pour tout A vérifiant (5.80), l'application $D \rightarrow u(D)|_A$ est dérivable de $\mathcal{D}_Q^{1,\infty}$ à valeurs dans $L^2(A)$ au point D_0 , et on a pour tout $\tau \in W^{1,\infty}(R^N, R^N)$:

$$(5.82) \quad \frac{\partial (u(D)|_A)}{\partial D}(D_0) \cdot \tau = U(\tau)|_A$$

où $U(\tau)$ est défini par

$$(5.83) \quad \begin{cases} U(\tau) + \langle \text{grad}(u(D_0)) - g, \tau \rangle \in H^1_0(D_0) \\ \Delta U(\tau) = 0 \quad \text{au sens de } \mathcal{D}'(D_0) \end{cases}$$

ii) On fait l'hypothèse (5.62). Pour tout domaine $D_0 \in \mathcal{D}_Q^{2,\infty}$ et tout A vérifiant (5.80), l'application $D \rightarrow u(D)|_A$ est dérivable de $\mathcal{D}_Q^{2,\infty}$ à valeurs dans $H^1(A)$ au point D_0 , et sa dérivée est donnée, pour tout $\tau \in W^{2,\infty}(R^N, R^N)$, par (5.82). ■

REMARQUE 5.11

Sous l'hypothèse (5.16), on a, d'après le lemme 5.2

$$\Delta(\langle \text{grad}(u(D_0)) - g, \tau \rangle) \in H^{-1}(D_0)$$

et l'équation (5.83) a donc une solution unique $U(\tau) \in L^2(D_0)$.

Si de plus D_0 est de classe $W^{2,\infty}$, ce qui est en particulier vérifié sous les hypothèses du point ii), on a $u(D_0) \in H^2(D_0)$ et donc

$$U(\tau) \in H^1(D_0)$$

$$U(\tau) = - \langle n, \tau \rangle \frac{\partial(u(D_0) - g)}{\partial n} \text{ sur } \partial D_0 \quad \blacksquare$$

REMARQUE 5.12

Supposons l'application $D \rightarrow u(D)|_A$ dérivable à valeurs dans $H^m(A)$, m réel. Alors $\Delta u(D)|_A = -f|_A$ est dérivable, à valeurs dans $H^{m-2}(A)$, et

$$\Delta \left(\frac{\partial(u(D)|_A)}{\partial D} (D_0) \cdot \tau \right) = 0 \text{ au sens des distributions dans } A.$$

Par contre la dérivabilité des restrictions $u(D)|_A$ n'entraîne pas a priori la condition aux limites

$$U(\tau) + \langle \text{grad}(u(D_0) - g), \tau \rangle \in H^1_0(D_0) \quad \blacksquare$$

REMARQUE 5.13

Le lemme 5.5 montre que $U(\tau)$ est la dérivée de l'état $u(D)$ par rapport à D au point D_0 , dérivation qui n'a qu'un sens local.

La décomposition (5.38) exprime la relation entre cette dérivée et la dérivée du transporté $\bar{v}_{D_0}(\theta)$ de la solution du problème homogène sur le domaine fixe D_0 . \blacksquare

Démonstration du lemme 5.5

On se donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} B \text{ un ouvert tel que } \bar{A} \subset B \text{ et } \bar{B} \subset D_0 \\ \alpha \text{ une fonction de } \mathcal{D}(D_0) \text{ qui vaut } 1 \text{ sur } B. \end{array} \right.$$

On a défini en (5.23), pour tout $\theta \in W^{1,\infty}(R^N, R^N)$ assez petit

$$\bar{v}_{D_0}(\theta) = (v((I+\theta)(D_0))) \circ (I+\theta) \in H^1_0(D_0)$$

et on note

$$w(\theta) = (\alpha \bar{v}_{D_0}(\theta))^\sim \circ (I+\theta)^{-1}$$

où $()^\sim$ désigne dans cette démonstration le prolongement par zéro à $\mathbb{R}^N - D_0$.

L'application $\theta \rightarrow (\alpha \bar{v}_{D_0}(\theta))^\sim$ étant dérivable d'après les lemmes 5.1 et 5.3, le lemme 4.6 de dérivation de $T \rightarrow (\phi(T)) \circ T^{-1}$ montre que :

$$(5.84) \left\{ \begin{array}{l} \text{i) Sous l'hypothèse (5.16), l'application } w \text{ est dérivable} \\ \text{de } W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \text{ à valeurs dans } L^2(\mathbb{R}^N) \text{ au point } 0, \text{ et} \\ \text{pour tout } \tau \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N), \text{ on a} \\ \frac{\partial w}{\partial \theta}(0) \cdot \tau = \frac{\partial ((\alpha \bar{v}_{D_0})^\sim)}{\partial \theta}(0) \cdot \tau - \langle \text{grad}(\alpha \bar{v}_{D_0}(0))^\sim, \tau \rangle \\ = (\alpha \frac{\partial \bar{v}_{D_0}}{\partial \theta}(0) \cdot \tau)^\sim - \langle \text{grad}(\alpha v(D_0))^\sim, \tau \rangle \\ \text{ii) Sous l'hypothèse (5.62), il y a dérivabilité de } W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \\ \text{à valeurs dans } H^1(\mathbb{R}^N). \end{array} \right.$$

Or si θ est assez petit dans $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, on a $(I+\theta)^{-1}(A) \subset B$,

$$\text{et donc } \left\{ \begin{array}{l} w(\theta)|_A = (\bar{v}_{D_0}(\theta)) \circ (I+\theta)^{-1}|_A = v((I+\theta)(D_0))|_A \\ = u((I+\theta)(D_0))|_A - g|_A \\ (\alpha \frac{\partial \bar{v}_{D_0}}{\partial \theta}(0) \cdot \tau)^\sim - \langle \text{grad}(\alpha v(D_0))^\sim, \tau \rangle|_A = \\ = \frac{\partial v_{D_0}}{\partial \theta}(0) \cdot \tau|_A - \langle \text{grad } v(D_0), \tau \rangle|_A = U(\tau)|_A \end{array} \right.$$

où $U(\tau)$ est défini par (5.38) et vérifie donc (5.40) et (5.41), c'est-à-dire (5.83).

L'application $\theta \rightarrow u((I+\theta)(D_0))|_A$ est donc dérivable au point zéro, avec

$$\frac{\partial (u((I+\theta)(D_0))|_A)}{\partial \theta} (0) \cdot \tau = U(\tau)|_A$$

ce qui, d'après la définition 3.1 de la dérivation dans les espaces de domaines, établit le lemme 5.5. ■

5.7.2 Dérivation d'un prolongement de l'état

On note $u(D)^{\sim g}$ le prolongé de $u(D)$ (solution du problème non homogène (5.4)) par g à $\mathbb{R}^N - D$, et $\tilde{v}(D)$ le prolongé de $v(D)$ (solution du problème homogène (5.2)) par zéro. Comme $v(D) = u(D) - g$ appartient à $H^1_0(D)$, la propriété (4.6) montre que (5.85) $u(D)^{\sim g} = \tilde{v}(D) - g \in H^1(\mathbb{R}^N)$.

LEMME 5.6

On fait l'hypothèse (5.16). L'application $D \rightarrow u(D)^{\sim g}$ est dérivable de $\mathcal{D}_Q^{1,\infty}$ à valeurs dans $L^2(\mathbb{R}^N)$ en tout point D_0 , et l'on a, pour tout $\tau \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$,

$$\frac{\partial (u(D)^{\sim g})}{\partial D} (D_0) \cdot \tau = \tilde{U}(\tau)$$

où $\tilde{U}(\tau)$ est le prolongé de $U(\tau)$, solution de (5.83), par 0 à $\mathbb{R}^N - D_0$. ■

REMARQUE 5.14

On ne peut pas espérer que l'application $D \rightarrow u(D)^{\sim g}$ soit dérivable à valeurs dans $H^1(\mathbb{R}^N)$, même si on fait des hypothèses de régularité plus fortes que (5.16). En effet, en général $U(\tau)$ n'appartient pas à $H^1_0(D_0)$, et donc $\tilde{U}(\tau)$ n'appartient pas à $H^1(\mathbb{R}^N)$. ■

Démonstration du lemme 5.6

Etant donné θ assez petit dans $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, on note $(\bar{v}_{D_0}(\theta))^\sim$ le prolongé de $\bar{v}_{D_0}(\theta) = (v((I+\theta)(D_0))) \circ (I+\theta)$ par

0 à $\mathbb{R}^N - D_0$. On a :

$$u((I+\theta)(D_0))^\sim g = ((\bar{v}_{D_0}(\theta))^\sim) \circ (I+\theta)^{-1} + g.$$

L'application $\theta \rightarrow (\bar{v}_{D_0}(\theta))^\sim$ étant dérivable d'après le lemme 5.1, le lemme 4.6 de dérivation de $T \rightarrow (\phi(T)) \circ T^{-1}$ montre que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{L'application } \theta \rightarrow u((I+\theta)(D_0))^\sim g \text{ est dérivable de} \\ W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \text{ à valeurs dans } L^2(\mathbb{R}^N) \text{ au point } 0, \text{ et pour tout} \\ \tau \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N), \text{ on a :} \\ \frac{\partial (u((I+\theta)(D_0))^\sim g)}{\partial \theta}(0) \cdot \tau = \frac{\partial ((\bar{v}_{D_0}(\theta))^\sim)}{\partial \theta}(0) \cdot \tau - \langle \text{grad}(\bar{v}_{D_0}(0))^\sim, \tau \rangle \\ = \left(\frac{\partial \bar{v}_{D_0}}{\partial \theta}(0) \right) \cdot \tau - \langle \text{grad } \tilde{v}(D_0), \tau \rangle = \tilde{U}(\tau) \end{array} \right.$$

où $U(\tau)$ est défini par (5.38) et vérifie donc (5.40) et (5.41), c'est-à-dire (5.83).

Cela établit le lemme 5.6, d'après la définition 3.1 de la dérivation dans les espaces de domaines. ■

5.7.3 Application à l'étude de problèmes où la fonction coût est définie par une intégrale sur un domaine fixe.

On fait l'hypothèse (5.1). Soit A un ouvert borné de \mathbb{R}^N .

Il résulte de (5.81) que :

$$\mathcal{D}_A = \{D \in \mathcal{D}_Q^{1,\infty} \mid \bar{A} \subset D\} \text{ est ouvert dans } \mathcal{D}_Q^{1,\infty}.$$

Pour tout $D \in \mathcal{D}_A$, on définit une nouvelle fonction coût par

$$(5.86) \quad J_2(D) = \int_A |u(D) - z|^2$$

Etant donné \mathcal{D}_{ad} un sous-ensemble de \mathcal{D}_A vérifiant les hypothèses (5.6) et (5.7), on montre, en reprenant la démonstration du théorème 5.1, qu'il existe un domaine minimisant J_2 sur \mathcal{D}_{ad} .

D'autre part, le lemme de dérivation 5.5 permet d'établir le :

THEOREME 5.5

On fait l'hypothèse (5.16).

i) La fonction J_2 est dérivable de $\mathcal{D}_Q^{1,\infty}$ à valeurs dans \mathbb{R} en tout point $D_0 \in \mathcal{D}_A$, et pour tout $\tau \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ on a

$$(5.87) \quad \frac{\partial J_2}{\partial D}(D_0) \cdot \tau = 2 \int_A (u(D_0) - z) U(\tau)$$

où $U(\tau)$ est défini par (5.83).

ii) Si de plus D_0 est de classe $W^{2,\infty}$, la dérivée de J_2 se met sous la forme

$$(5.88) \quad \frac{\partial J_2}{\partial D}(D_0) \cdot \tau = 2 \int_{\partial D_0} \langle n, \tau \rangle \cdot \frac{\partial p_2(D_0)}{\partial n} \frac{\partial (u(D_0) - z)}{\partial n}$$

où l'état adjoint $p_2(D_0)$ est défini par : (1)

$$\begin{cases} p_2(D_0) \in H^1(D_0) \\ -\Delta p_2(D_0) = (u(D_0) - z) \chi_A \quad \text{dans } \mathcal{D}'(D_0) \end{cases}$$

(1) χ_A désigne la fonction caractéristique de A.

REMARQUE 5.15

On peut étendre ces résultats à des fonctionnelles d'ordre 1 définies par une intégrale sur A , en utilisant la partie ii) du lemme 5.5. En faisant des hypothèses plus fortes on pourrait les étendre à des fonctionnelles d'ordre plus élevé. ■

REMARQUE 5.16

Etant donné un ouvert A de \mathbb{R}^N , considérons la fonctionnelle définie sur $\mathcal{D}_0^{1,\infty}$ tout entier par :

$$J_3(D) = \int_A |u(D) \tilde{g}_{-z}|^2$$

où $u(D) \tilde{g}$ est le prolongement de $u(D)$ par g à $\mathbb{R}^N - D$

(Cf. paragraphe 5.7.2.).

On a un résultat d'existence analogue au théorème 5.1, et le lemme 5.6 montre que J_3 est dérivable en tout point D_0 avec pour tout $\tau \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$

$$\frac{\partial J_3}{\partial D}(D_0) \cdot \tau = \int_{A \cap D_0} 2(u(D_0) - z) U(\tau)$$

expression qu'on peut mettre, quand D_0 est régulier, sous forme d'une intégrale sur ∂D_0 en introduisant un état adjoint.

Mais contrairement aux fonctionnelles définies par une intégrale sur un domaine A tel que $\bar{A} \subset D_0$, on ne sait pas étendre ces résultats à des fonctionnelles d'ordre plus élevé, car, comme on l'a vu à la remarque 5.14, l'application $D \rightarrow u(D) \tilde{g}$ n'est pas dérivable à valeurs dans $H^1(\mathbb{R}^N)$. ■

VI - ETUDE DE PROBLEMES DE CONTROLE PAR LE DOMAINE,
ASSOCIES A UN PROBLEME DE NEUMANN.

6.0. INTRODUCTION

On considère dans ce chapitre des problèmes de contrôle par le domaine où l'état du système $u(D)$ est solution d'un problème de Neumann dans D :

$$\begin{cases} -\Delta u(D) + u(D) = f & \text{dans } D \\ \frac{\partial u(D)}{\partial n} = g & \text{sur } \partial D \end{cases}$$

On considère les fonctions coûts définies sur $\mathcal{D}_Q^{2,\infty}$ par

$$J_1(D) = \int_D |\text{grad}(u(D)-z)|^2 dx$$

$$J_2(D) = \int_{\partial D} |u(D)-z|^2 ds$$

On énonce un résultat d'existence (qui se démontre par une méthode de transport sur le domaine fixe Q).

On démontre ensuite que les fonctions coût sont dérivables de $\mathcal{D}_Q^{2,\infty}$ à valeurs dans \mathbb{R} , et on calcule leurs dérivées. Ces dérivées sont de la forme

$$\frac{\partial J}{\partial D}(D_0) \cdot \tau = \int_{\partial D_0} \langle n, \tau \rangle \mathcal{F}(u(D_0), p(D_0)) ds$$

où $\langle n, \tau \rangle = \sum_{i=1}^N n_i \tau_i$ est la composante normale de τ et où

$p(D_0)$ est un état adjoint qui ne dépend pas de τ ; cette expression permet de déterminer explicitement les directions de descente.

Pour déduire de ces résultats de dérivation des conditions nécessaires d'optimalité, on renvoie aux résultats généraux des paragraphes 3.4 et 3.5.

On établit enfin que les restrictions de l'état $u(D)$ à un domaine fixe sont dérivables par rapport à D , ce qui montre que l'application $D \rightarrow u(D)$ est dérivable en un sens local. Cela permettrait de dériver des fonctionnelles définies par une intégrale sur un domaine fixe.

On reprend ici les méthodes générales développées au chapitre 5 pour des problèmes de contrôle par le domaine associés à un problème de Dirichlet. On passera donc rapidement sur certains points.

On suivra le plan :

- 6.1 Position du problème .
- 6.2 Existence d'un domaine optimal .
- 6.3 Dérivation des fonctions coût .
- 6.4 Dérivation du transporté de l'état sur un domaine fixe .
- 6.5 Démonstration des résultats de dérivation des fonctions coût .
- 6.6 Complément sur la dérivation de l'état .

6.1 POSITION DU PROBLEME

On se donne

$$(6.1) \left\{ \begin{array}{l} Q \text{ un ouvert borné connexe de } \mathbb{R}^N, \text{ localement graphe lipschitzien} \\ f \in L^2(\mathbb{R}^N), g \in H^1(\mathbb{R}^N) \text{ et } z \in H^1(\mathbb{R}^N) \end{array} \right.$$

Tout domaine $D \in \mathcal{D}_Q^{1, \bar{c}}$ est borné connexe, localement graphe lipschitzien et on définit de façon unique l'état $u(D)$ du système par :

$$(6.2) \quad \begin{cases} u(D) \in H^1(D) \\ \int_D \{ \langle \text{grad } u(D), \text{grad } \varphi \rangle + u(D) \varphi \} = \int_D f \varphi + \int_{\partial D} g \varphi \quad \forall \varphi \in H^1(D) \end{cases}$$

On va considérer les fonctions coûts définies par :

$$(6.3) \quad J_1(D) = \int_D |\text{grad}(u(D)-z)|^2 dx$$

$$(6.4) \quad J_2(D) = \int_{\partial D} |u(D)-z|^2 ds$$

REMARQUE 6.1

Ces deux fonctionnelles sont d'ordre 1 ; on pourrait comme au chapitre 5 étudier des fonctionnelles d'ordre plus élevé en faisant des hypothèses de régularité plus fortes, ou encore étudier des fonctionnelles définies par une intégrale sur un domaine fixe A . ■

6.2 EXISTENCE D'UN DOMAINE OPTIMAL

THEOREME 6.1

On fait l'hypothèse (6.1), et on se donne \mathcal{D}_{ad} un sous ensemble compact de $\mathcal{D}_Q^{1,\bar{c}}$.

Il existe un domaine optimal, i.e. un domaine D_1 tel que

$$D_1 \in \mathcal{D}_{ad} \quad , \quad J_1(D_1) \leq J_1(D) \quad \forall D \in \mathcal{D}_{ad} \quad .$$

On démontre ce théorème en se ramenant sur l'ouvert fixe Q , comme au théorème 5.3. On a le même résultat pour J_2 .

En employant des méthodes de prolongement de la solution, D. CHENAIS [1] a établi un résultat d'existence pour un problème voisin, dans une autre classe de domaines.

6.3 DERIVATION DES FONCTIONS COUTS

Pour obtenir des résultats de dérivation, on va supposer que :

$$(6.5) \left\{ \begin{array}{l} Q \text{ est un ouvert borné connexe de classe } W^{2,\infty} \\ f \in H^1(\mathbb{R}^N) \quad g \in H^2(\mathbb{R}^N) \quad \text{et } z \in H^2(\mathbb{R}^N) \end{array} \right.$$

Tout domaine $D \in \mathcal{D}_Q^{2,\infty}$ est alors de classe $W^{2,\infty}$, de sorte que $u(D)$ est solution forte de (6.2) au sens suivant :

$$(6.6) \left\{ \begin{array}{l} u(D) \in H^2(D) \\ -\Delta u(D) + u(D) = f \quad \text{dans } L^2(D) \\ \frac{\partial u(D)}{\partial n} = g \quad \text{dans } H^{1/2}(\partial D) \end{array} \right.$$

THEOREME 6.2

On fait l'hypothèse (6.5).

L'application J_1 définie par (6.2) et (6.3) est dérivable de $\mathcal{D}_Q^{2,\infty}$ à valeurs dans \mathbb{R} en tout point D_0 , et l'on a pour tout $\tau \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$

$$(6.7) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial J_1}{\partial D}(D_0) \cdot \tau = \int_{\partial D_0} \langle n, \tau \rangle \{ |\text{grad}(u(D_0) - z)|^2 - 2 \langle \text{grad } u(D_0), \text{grad } p_1(D_0) \rangle \\ + 2 p_1(D_0) (f - u(D_0)) + \frac{\partial g}{\partial n} + Hg \} + 2 g \frac{\partial}{\partial n}(u(D_0) - z) \end{array} \right.$$

où H est la courbure moyenne de ∂D_0 , définie au paragraphe 4.3.4, et où l'état adjoint $p_1(D_0)$ est défini par

$$(6.8) \left\{ \begin{array}{l} p_1(D_0) \in H^2(D_0) \\ -\Delta p_1(D_0) + p_1(D_0) = -\Delta(u(D_0) - z) \quad \text{dans } L^2(D_0) \\ \frac{\partial p_1(D_0)}{\partial n} = \frac{\partial (u(D_0) - z)}{\partial n} \quad \text{dans } H^{1/2}(\partial D_0) \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

REMARQUE 6.2

Au chapitre précédent, on avait obtenu la dérivée de la fonction coût J sous la forme d'une intégrale sur D_0 faisant intervenir $u(D_0)$ et la dérivée $\frac{\partial \bar{v}_{D_0}}{\partial \theta}(0) \cdot \tau$ du transporté sur D_0 de l'état (cf. (5.17)). On a ici un résultat analogue, comme on le verra dans la démonstration du théorème, (cf. (6.21)).

Pour exprimer la dérivée sous la forme

$$\frac{\partial J}{\partial D}(D_0) \cdot \tau = \int_{\partial D_0} \langle n, \tau \rangle \mathcal{F}(u(D_0), p(D_0)) ,$$

ce qui permet de déterminer explicitement les directions de descente, on était conduit à faire une hypothèse de régularité sur D_0 . Ici on a une telle expression sans hypothèse supplémentaire. ■

THEOREME 6.3

On fait l'hypothèse (6.5).

L'application J_2 définie par (6.2) et (6.4) est dérivable de $\mathcal{D}_Q^{2,\infty}$ à valeurs dans \mathbb{R} en tout point D_0 , et on a, pour tout $\tau \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$:

$$(6.9) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial J_2}{\partial D}(D_0) \cdot \tau = \int_{\partial D_0} \langle n, \tau \rangle \left\{ \frac{\partial}{\partial n} (|u(D_0) - z|^2) + H (u(D_0) - z)^2 + 2g (u(D_0) - z) \right. \\ \left. + 2p_2(D_0) (H g + f - u(D_0) + \frac{\partial g}{\partial n}) \right. \\ \left. - 2 \langle \text{grad } u(D_0), \text{grad } p_2(D_0) \rangle \right\} \end{array} \right.$$

où H est la courbure moyenne de ∂D_0 , définie au paragraphe 4.3.4, et où l'état adjoint $p_2(D_0)$ est défini par :

$$(6.10) \left\{ \begin{array}{ll} p_2(D_0) \in H^2(D_0) & \\ -\Delta p_2(D_0) + p_2(D_0) = 0 & \text{dans } L^2(D_0) \\ \frac{\partial p_2(D_0)}{\partial n} = u(D_0) - z & \text{dans } H^{1/2}(\partial D_0) \end{array} \right. \quad \blacksquare$$

Nous allons démontrer les théorèmes 6.2 et 6.3 en utilisant le même principe que pour les résultats de dérivation du chapitre 5, principe exposé à la fin du paragraphe 5.3 . Nous allons donc commencer par établir un résultat de dérivation du transporté \bar{u}_{D_0} de l'état $u(D)$ sur le domaine fixe D_0 .

6.4 DERIVATION DU TRANSPORTE DE L'ETAT SUR UN DOMAINE FIXE .

Rappelons que si θ est assez petit dans $W^{2,\infty}(R^N, R^N)$, alors $I+\theta \in \mathcal{C}^{2,\infty}$, et, D_0 étant fixé dans $\mathcal{D}_Q^{2,\infty}$, $(I+\theta)(D_0) \in \mathcal{D}_Q^{2,\infty}$.

Alors, sous l'hypothèse (6.5), l'équation (6.2) définit $u((I+\theta)(D_0))$ qui appartient à $H^2(I+\theta)(D_0)$ et on introduit son transporté sur le domaine D_0 par :

$$(6.11) \quad \bar{u}_{D_0}(\theta) = u((I+\theta)(D_0)) \circ (I+\theta)$$

qui appartient à $H^2(D_0)$, d'après le lemme 4.1 ii) . Notons que $\bar{u}_{D_0}(0) = u(D_0)$.

LEMME 6.1

On fait l'hypothèse (6.5). Pour tout domaine $D_0 \in \mathcal{D}_Q^{2,\infty}$, l'application \bar{u}_{D_0} est dérivable de $W^{2,\infty}(R^N, R^N)$ à valeurs dans $H^2(D_0)$ au point 0, et on a pour tout $\tau \in W^{2,\infty}(R^N, R^N)$

$$(6.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \bar{u}_{D_0}}{\partial \theta}(0) \cdot \tau \in H^2(D_0) \\ - \Delta \left(\frac{\partial \bar{u}_{D_0}}{\partial \theta}(0) \cdot \tau \right) + \frac{\partial \bar{u}_{D_0}}{\partial \theta}(0) \cdot \tau = - \Delta \langle \text{grad } u(D_0), \tau \rangle + \langle \text{grad } u(D_0), \tau \rangle \\ \hspace{20em} \text{dans } L^2(D_0) \\ \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial \bar{u}_{D_0}}{\partial \theta}(0) \cdot \tau \right) = \langle n, ([\tau'] + {}^t[\tau']) \text{grad } u(D_0) \rangle + \langle \text{grad } g, \tau \rangle - g \langle [\tau'] n, n \rangle \\ \hspace{20em} \text{dans } H^{1/2}(\partial D_0) \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

Notons que ce lemme permettrait d'établir des résultats de dérivation de fonctionnelles d'ordre 2 .

REMARQUE 6.3

L'hypothèse (6.5) entraîne $\Delta u(D_0) \in H^1(D_0)$, et le lemme 5.2 montre que

$$(6.13) \quad \Delta(\langle \text{grad } u(D_0), \tau \rangle) \in L^2(D_0) \quad \forall \tau \in W^{2,\infty}(R^N, R^N)$$

donc l'équation (6.12) admet une solution unique. ■

Démonstration du lemme 6.1

1) Equation implicite vérifiée par \bar{u}_{D_0} .

La fonction $u((I+\theta)(D_0))$ est solution de l'équation (6.2) relative au domaine $(I+\theta)(D_0)$; en effectuant le changement de variable $I+\theta$, il vient d'après les lemmes 4.1 et 4.7 :

$$(6.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{D_0} \{ \langle [(I+\theta)']^{-1} \text{grad } \bar{u}_{D_0}(\theta), [(I+\theta)']^{-1} \text{grad } \psi \rangle + \bar{u}_{D_0}(\theta) \psi \} |\det[(I+\theta)']| \\ = \int_{D_0} f_0(I+\theta) \psi |\det[(I+\theta)']| + \int_{\partial D_0} g_0(I+\theta) \psi |\det[(I+\theta)']| | [(I+\theta)']^{-1} n |_{R^N} \end{array} \right. \quad \forall \psi \in H^1(D_0)$$

Notons que quand φ décrit $H^1((I+\theta)(D_0))$, $\psi = \varphi \circ (I+\theta)$ décrit $H^1(D_0)$, et que $\bar{u}_{D_0}(\theta)$ appartient à $H^2(D_0)$.

Considérons la fonction $G = (G_1, G_2)$ de $\mathcal{W}_2 \times H^2(D_0)$ où

$$\mathcal{W}_2 = \{ \theta \in W^{2,\infty}(R^N, R^N) , \| \theta \|_2 \leq \frac{1}{2\sqrt{2N^5}} \} ,$$

à valeurs dans $L^2(D_0) \times H^{1/2}(\partial D_0)$, définie par :

$$(6.15) \begin{cases} G_1(\theta, v) = - \operatorname{div}\{|\det[(I+\theta)']|\} [(I+\theta)']^{-1} \mathcal{L}[(I+\theta)']^{-1} \operatorname{grad} v\} \\ \quad + v |\det[(I+\theta)']| - f_0(I+\theta) |\det[(I+\theta)']| \\ G_2(\theta, v) = \langle n, |\det[(I+\theta)']| [(I+\theta)']^{-1} \mathcal{L}[(I+\theta)']^{-1} \operatorname{grad} v \rangle \\ \quad - g_0(I+\theta) |\det[(I+\theta)']| \mathcal{L}[(I+\theta)']^{-1} n \Big|_{\mathbb{R}^N} \end{cases}$$

L'équation (6.14) montre que \bar{u}_{D_0} vérifie

$$(6.16) \quad G(\theta, \bar{u}_{D_0}(\theta)) = (0, 0).$$

2) Utilisation du théorème de dérivation de la solution d'une équation implicite.

Vérifions les hypothèses nécessaires pour appliquer ce théorème :

i) La fonction G est dérivable de $W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) \times H^2(D_0)$ à valeurs dans $L^2(D_0) \times H^{1/2}(\partial D_0)$ au point $(0, \bar{u}_{D_0}(0)) = (0, u(D_0))$, d'après les lemmes 4.2, 4.3 et 4.4 complétés par la remarque 4.2, et on a pour tout $Y \in H^2(D_0)$ et pour tout $\tau \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$:

$$(6.17) \begin{cases} \frac{\partial G_1}{\partial v}(0, u(D_0)) \cdot Y = - \Delta Y + Y \\ \frac{\partial G_2}{\partial v}(0, u(D_0)) \cdot Y = \langle n, \operatorname{grad} Y \rangle = \frac{\partial Y}{\partial n} \\ \frac{\partial G_1}{\partial \theta}(0, u(D_0)) \cdot \tau = - \operatorname{div}\{(\operatorname{div} \tau) \operatorname{grad} u(D_0) - ([\tau]' + \mathcal{L}[\tau']) \operatorname{grad} u(D_0)\} \\ \quad + u(D_0) \operatorname{div} \tau - \langle \operatorname{grad} f, \tau \rangle - f \operatorname{div} \tau \\ \frac{\partial G_2}{\partial \theta}(0, u(D_0)) \cdot \tau = \langle n, (\operatorname{div} \tau) \operatorname{grad} u(D_0) - ([\tau]' + \mathcal{L}[\tau']) \operatorname{grad} u(D_0) \rangle \\ \quad - \langle \operatorname{grad} g, \tau \rangle - g \operatorname{div} \tau + \langle \mathcal{L}[\tau'] n, n \rangle g \end{cases}$$

Il résulte du lemme 5.2 (puisque $\Delta u(D_0) = u(D_0) - f \in H^1(D_0)$) et de la condition aux limites $\frac{\partial u(D_0)}{\partial n} = g$ sur ∂D_0 que l'on a :

$$(6.18) \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial G_1}{\partial \theta}(0, u(D_0)) \cdot \tau = -\Delta(\langle \text{grad } u(D_0), \tau \rangle) + \langle \text{grad } u(D_0), \tau \rangle \\ -\frac{\partial G_2}{\partial \theta}(0, u(D_0)) \cdot \tau = \langle n, ([\tau'] + {}^t[\tau']) \text{grad } u(D_0) \rangle \\ \quad + \langle \text{grad } g, \tau \rangle - g \langle [\tau'] n, n \rangle. \end{array} \right.$$

ii) D'après (6.17), $\frac{\partial G}{\partial v}(0, u(D_0))$ est un isomorphisme de $H^2(D_0)$ sur $L^2(D_0) \times H^{1/2}(\partial D_0)$.

iii) L'application \bar{u}_{D_0} est continue de $W^{2,\infty}(R^N, R^N)$ à valeurs dans $H^2(D_0)$ au point 0, d'après les lemmes 4.2, 4.3 et 4.4 de continuité, puisque la solution d'un problème de Neuman non homogène dépend continûment des coefficients, du second nombre et de la donnée au bord dans les espaces appropriés.

Il résulte de ces trois propriétés, et du théorème général de dérivation de la solution d'une équation implicite, que \bar{u}_{D_0} est dérivable de $W^{2,\infty}(R^N, R^N)$ à valeurs dans $H^2(D_0)$ au point 0, et que l'on a, pour tout $\tau \in W^{2,\infty}(R^N, R^N)$:

$$\frac{\partial G}{\partial v}(0, u(D_0)) \cdot \frac{\partial \bar{u}_{D_0}}{\partial \theta}(0) \cdot \tau = -\frac{\partial G}{\partial \theta}(0) \cdot \tau$$

ce qui établit (6.12). ■

REMARQUE 6.4

i) Pour obtenir l'équation implicite vérifiée par $\bar{u}_{D_0}(\theta)$, on a effectué le changement de variable $I+\theta$ dans l'équation (6.2) vérifiée par $u((I+\theta)(D_0))$. Cela nous a conduit à (6.16).

ii) Une autre méthode consiste à effectuer un changement de variable dans la formulation forte (6.6) du problème; on transporte $\Delta = \text{div grad}$ en transportant le gradient grâce à (4.9) et la divergence grâce à :

$$(6.19) \begin{cases} (\operatorname{div} X) \circ T = \frac{1}{|\det[T']|} \operatorname{div}\{|\det[T']| [T']^{-1} X \circ T\} \\ \forall X \in H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) , \quad \forall T \in \mathcal{C}^{2,\infty} \end{cases}$$

et on transporte dans la condition aux limites $\frac{\partial}{\partial n} = \langle n, \operatorname{grad} \rangle$ grâce à (4.9) et (4.78). Cela conduit également à l'équation implicite (6.16).

L'égalité (6.19) se démontre en considérant l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\operatorname{div} X) \circ T \varphi \quad \text{où } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N) ,$$

en appliquant le lemme 4.1 de changement de variable et en intégrant par parties.

iii) Notons que la formule (4.9) de transport des dérivées donne :

$$(6.20) \begin{cases} (\operatorname{div} X) \circ T = \sum_{ij} ([T']^{-1})_{ji} \frac{\partial (X_i \circ T)}{\partial x_j} \\ \forall X \in H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N) , \quad \forall T \in \mathcal{C}^{1,\infty} \end{cases}$$

ce qui conduit a priori à une équation implicite différente de (6.16).

Mais on peut vérifier, quand $T \in \mathcal{C}^{2,\infty}$, que le second membre de (6.20) est égal à celui de (6.19), en développant celui-ci et en utilisant l'identité (qui résulte des propriétés des déterminants)

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \{ \det [T'] ([T']^{-1})_{ij} \} = 0 \quad , \quad j = 1, \dots, N \quad \blacksquare$$

6.5 DEMONSTRATION DES RESULTATS DE DERIVATION DES FONCTIONS COÛTS.

Ces démonstrations sont analogues à celles des théorèmes 5.2 et 5.4, et on n'en rappellera que les principaux points.

Démonstration du théorème 6.2.1) Dérivabilité de J_1 .

On utilise le théorème 4.1, avec

$$\phi(D) = |\text{grad}(u(D)-z)|^2 ;$$

l'application $\bar{\phi}_{D_0}$ vaut ici

$$\bar{\phi}_{D_0}(\theta) = |[(I+\theta)]^{-1} \text{grad}(\bar{u}_{D_0}(\theta) - z_0(I+\theta))|^2$$

qui est dérivable de $W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ à valeurs dans $L^1(D_0)$ au point 0, d'après les lemmes 6.1, 4.2, et 4.4.

Ce théorème montre que J_1 est dérivable de $\mathcal{D}_Q^{2,\infty}$ à valeurs dans \mathbb{R} au point D_0 et que pour tout $\tau \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, on a :

$$(6.21) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial J_1}{\partial D}(D_0) \cdot \tau = \int_{D_0} \left\{ |\text{grad}(u(D_0)-z)|^2 \text{div } \tau + 2 \langle \text{grad}(u(D_0)-z), \right. \\ \left. \left. \left\{ \text{grad}\left(\frac{\partial \bar{u}_{D_0}}{\partial \theta}(0) \cdot \tau - \langle \text{grad } z, \tau \rangle\right) - [\tau] \text{grad}(u(D_0)-z) \right\} \right\} \right. \end{array} \right.$$

Pour en déduire (6.7) on va effectuer la décomposition :

$$(6.22) \quad \frac{\partial \bar{u}_{D_0}}{\partial \theta}(0) \cdot \tau = U(\tau) + \langle \text{grad } u(D_0), \tau \rangle$$

2) Etude de $U(\tau)$.

Comme $\frac{\partial \bar{u}_{D_0}}{\partial \theta}(0) \cdot \tau$ est solution de (6.12), on a

$$(6.23) \left\{ \begin{array}{l} U(\tau) \in H^1(D_0) \\ -\Delta U(\tau) + U(\tau) = 0 \quad \text{dans } H^1(D_0) \end{array} \right.$$

On va montrer de plus que :

$$(6.24) \left\{ \begin{array}{l} \int_{D_0} (\Delta U(\tau) p + \langle \text{grad } U(\tau), \text{grad } p \rangle) = \\ \int_{\partial D_0} \langle n, \tau \rangle \{ - \langle \text{grad } u(D_0), \text{grad } p \rangle - \Delta u(D_0) p + p \frac{\partial g}{\partial n} + g \frac{\partial p}{\partial n} + H g p \} \\ \forall p \in H^2(D_0). \end{array} \right.$$

Utilisons pour cela la décomposition (6.22) ; il vient

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{D_0} (\Delta U(\tau) p + \langle \text{grad } U(\tau), \text{grad } p \rangle) = A_1 + A_2, \text{ où} \\ A_1 = \int_{D_0} \left\{ \Delta \left(\frac{\partial \bar{u}_{D_0}}{\partial \theta}(0) \cdot \tau \right) p + \langle \text{grad} \left(\frac{\partial \bar{u}_{D_0}}{\partial \theta}(0) \cdot \tau \right), \text{grad } p \rangle \right\} \\ A_2 = - \int_{D_0} \left\{ \Delta (\langle \text{grad } u(D_0), \tau \rangle) p + \langle \text{grad} (\langle \text{grad } u(D_0), \tau \rangle), \text{grad } p \rangle \right\}. \end{array} \right.$$

D'après (6.12) on a

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = \int_{\partial D_0} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\partial \bar{u}_{D_0}}{\partial \theta}(0) \cdot \tau \right) p \\ = \int_{\partial D_0} \{ \langle n, ([\tau'] + {}^t[\tau']) \text{grad } u(D_0) \rangle + \langle \text{grad } g, \tau \rangle - g \langle [\tau'] n, n \rangle \} p. \end{array} \right.$$

D'autre part d'après le lemme 5.4 on a, puisque $\frac{\partial u(D_0)}{\partial n} = g$,

$$\left\{ \begin{array}{l} A_2 = - \int_{D_0} \text{div}(p \text{grad}(\langle \text{grad } u(D_0), \tau \rangle)) \\ = - \int_{\partial D_0} \langle n, \tau \rangle (\langle \text{grad } u(D_0), \text{grad } p \rangle + \Delta u(D_0) p) \\ + \int_{\partial D_0} \{ g(p \text{div } \tau + \langle \tau, \text{grad } p \rangle) - p \langle n, ([\tau'] + {}^t[\tau']) \text{grad } u(D_0) \rangle \} \end{array} \right.$$

Le lemme 4.9 relatif à $g p$, qui appartient à $W^{2,1}(D_0)$, montre que $A_1 + A_2$ est égal au second membre de (6.24).

3) Démonstration de (6.7).

En effectuant la décomposition (6.22) dans (6.21) on obtient

$$(6.25) \quad \frac{\partial J}{\partial D}(D_0) \cdot \tau = \int_{D_0} \{2 \langle \text{grad}(u(D_0) - z), \text{grad } U(\tau) \rangle + \text{div}(\tau |\text{grad}(u(D_0) - z)|^2)\}$$

En utilisant la formule de Green, la définition (6.8) de l'état adjoint $p_1(D_0)$ et les égalités (6.23) et (6.24), il vient

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_{D_0} \langle \text{grad}(u(D_0) - z), \text{grad } U(\tau) \rangle = \\ & = \int_{D_0} -\Delta(u(D_0) - z) U(\tau) + \int_{\partial D_0} \frac{\partial(u(D_0) - z)}{\partial n} U(\tau) \\ & = \int_{D_0} \langle \text{grad } p_1(D_0), \text{grad } U(\tau) \rangle + U(\tau) p_1(D_0) \\ & = \int_{\partial D_0} \langle n, \tau \rangle \{ - \langle \text{grad } u(D_0), \text{grad } p_1(D_0) \rangle - \Delta u(D_0) p_1(D_0) \\ & \quad + p_1(D_0) \frac{\partial g}{\partial n} + g \frac{\partial p_1(D_0)}{\partial n} + H g p_1(D_0) \} \end{aligned} \right.$$

L'égalité (6.25) donne alors (6.7), puisque $-\Delta u(D_0) = f - u(D_0)$. ■

Démonstration du théorème 6.3.

1) Dérivabilité de J_2 .

On utilise le théorème 4.3. avec $\phi(D) = |u(D) - z|^2$;
l'application $\bar{\phi}_{D_0}$ vaut ici $\bar{\phi}_{D_0}(\theta) = |\bar{u}_{D_0}(\theta) - z_0(I + \theta)|^2$,

qui est dérivable de $W^{2,\infty}(R^N, R^N)$ à valeurs dans $L^1(\partial D_0)$ au point 0, d'après les lemmes 6.1 et 4.4 ii).

Ce théorème montre que J_2 est dérivable de $\mathcal{D}_Q^{2,\infty}$ à valeurs dans R au point D_0 et que pour tout $\tau \in W^{2,\infty}(R^N, R^N)$, on a :

$$(6.26) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial J_2}{\partial D}(D_0) \cdot \tau &= \int_{\partial D_0} |u(D_0) - z|^2 (\operatorname{div} \tau - \langle [\tau'] n, n \rangle) \\ &+ \int_{\partial D_0} 2(u(D_0) - z) \left(\frac{\partial \bar{u}_D}{\partial \theta}(0) \right) \cdot \tau - \langle \operatorname{grad} z, \tau \rangle \end{aligned} \right.$$

2) Démonstration de (6.9).

Effectuons dans (6.26) la décomposition (6.22). Il vient, en utilisant le lemme 4.9 avec $f = |u(D_0) - z|^2$, pour tout $\tau \in W^{2,\infty}(R^N, R^N)$:

$$(6.27) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial J_2}{\partial D}(D_0) \cdot \tau &= \int_{\partial D_0} 2(u(D_0) - z) U(\tau) \\ &+ \int_{\partial D_0} \langle n, \tau \rangle \left\{ \frac{\partial}{\partial n} (|u(D_0) - z|^2) + H(u(D_0) - z)^2 \right\} \end{aligned} \right.$$

En utilisant la définition (6.10) de l'état adjoint $p_2(D_0)$, la formule de Green et les égalités (6.23) et (6.24), on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\partial D_0} (u(D_0) - z) U(\tau) &= \int_{\partial D_0} \frac{\partial p_2(D_0)}{\partial n} U(\tau) = \\ &= \int_{D_0} (-\Delta U(\tau) + U(\tau)) p_2(D_0) - (-\Delta p_2(D_0) + p_2(D_0)) U(\tau) \\ &+ \int_{D_0} \Delta U(\tau) p_2(D_0) + \langle \operatorname{grad} p_2(D_0), \operatorname{grad} U(\tau) \rangle \\ &= \int_{\partial D_0} \langle n, \tau \rangle \left\{ -\langle \operatorname{grad} u(D_0), \operatorname{grad} p_2(D_0) \rangle - \Delta u(D_0) p_2(D_0) \right. \\ &\quad \left. + p_2(D_0) \frac{\partial g}{\partial n} + g \frac{\partial p_2(D_0)}{\partial n} + H g p_2(D_0) \right\}. \end{aligned}$$

L'égalité (6.27) donne alors (6.9) puisque $-\Delta u(D_0) = f - u(D_0)$ ■

6.6 . COMPLEMENT SUR LA DERIVATION DE L'ETAT.

On peut, comme au paragraphe 5.7.1 , donner un résultat de dérivation des restrictions de l'état $u(D)$ à un domaine fixe A :

LEMME 6.2

On fait l'hypothèse (6.5). Etant donnés $D_0 \in \mathcal{D}_Q^{2,\infty}$ et A un ouvert tel que $\bar{A} \subset D_0$ l'application $D \rightarrow u(D)|_A$ est dérivable de $\mathcal{D}_Q^{2,\infty}$ à valeurs dans $H^1(A)$ au point D_0 , et on a, pour tout $\tau \in W^{2,\infty}(R^N, R^N)$:

$$(6.28) \quad \frac{\partial(u(D)|_A)}{\partial D}(D_0) \cdot \tau = U(\tau)|_A$$

où $U(\tau)$ est défini par

$$(6.29) \quad \left\{ \begin{array}{l} U(\tau) \in H^1(D_0) \\ -\Delta U(\tau) + U(\tau) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(D_0) \\ \frac{\partial U(\tau)}{\partial n} = \langle n, ([\tau'] + [{}^t\tau']) \text{grad } u(D_0) \rangle + \langle \text{grad } g, \tau \rangle - g \langle [\tau'] n, n \rangle \\ \quad - \frac{\partial}{\partial n} (\langle \text{grad } u(D_0), \tau \rangle) \quad \text{dans } H^{-1/2}(\partial D_0) \end{array} \right.$$

De plus $U(\tau)$ vérifie, pour tout $p \in H^2(D_0)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \langle \frac{\partial U(\tau)}{\partial n}, p \rangle \rangle_{H^{-1/2}, H^{1/2}(\partial D_0)} = \int_{\partial D_0} \langle n, \tau \rangle \{ - \langle \text{grad } u(D_0), \text{grad } p \rangle - \Delta u(D_0) p \\ \quad + p \frac{\partial g}{\partial n} + g \frac{\partial p}{\partial n} + H g p \} \quad \blacksquare \end{array} \right.$$

La démonstration est analogue à celle du lemme 5.5 ; elle utilise les propriétés (6.23) et (6.24).

REMARQUE 6.5

Etant donné $v \in H^1(D_0)$ tel que $\Delta v \in L^2(D_0)$, on définit sa dérivée normale $\frac{\partial v}{\partial n} \in H^{-1/2}(D_0)$ par la formule de Green.

La condition aux limites de (6.29) est donc bien posée dans $H^{-1/2}(\partial D_0)$, puisque $\langle \text{grad } u(D_0), \tau \rangle \in H^1(D_0)$ et $\Delta(\langle \text{grad } u(D_0), \tau \rangle) \in L^2(D_0)$ d'après (6.13). ■

Le lemme 6.2 montre que $U(\tau)$ est la dérivée de l'état $u(D)$ par rapport à D au point D_0 , dérivation qui n'a qu'un sens local.

La décomposition (6.22) exprime la relation entre cette dérivée et la dérivée du transporté $\bar{u}_{D_0}(\theta)$ de l'état sur le domaine fixe D_0 .

Ce lemme donne des résultats de dérivation de fonctions coûts d'ordre inférieur ou égal à 1, définies sur l'ensemble

$$\mathcal{D}_A = \{D \in \mathcal{D}_Q^{2,\infty} \mid \bar{A} \subset D\}$$

par une intégrale sur le domaine fixe A .

VII - BIBLIOGRAPHIE

D. BEGIS - R. GLOWINSKI

- [1] Application de la méthode des éléments finis à la résolution d'un problème de domaine optimal. Proceedings of the IRIA Symposium on Computing Methods in Applied Sciences and Engineering. R. GLOWINSKI and J.L. LIONS Ed. . Lectures Notes in Computer Sciences, B11, Springer Verlag (1974) pp. 403-434.
- [2] Application de la méthode des éléments finis à l'approximation d'un problème de domaine optimal. Méthodes de résolution des problèmes approchés. J. of Applied Math. and Optimization. (1975) Volume 2 (2) pp. 130-170.

A. BENDALI

- [1] Existence et régularisation dans un problème d'identification de domaine. Application à l'analyse numérique d'un cas modèle. Thèse 3ème cycle, Alger, (1975).

N. BOURBAKI

- [1] IV. Eléments de Mathématiques - Livre II - Algèbre - Chapitre I - Structures algébriques. Hermann, Paris (1964).
- [2] Eléments de Mathématiques - Fascicule III - Livre III - Topologie Générale - Chapitre 3. Hermann, Paris (1960).

J.M. BOUROT

- [1] Sur la détermination du profil de l'obstacle qui offre, en régime de Stokes, la résistance minimale pour un volume donné. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 278 Série A (1974).

J. CEA

[1] Optimisation, théorie et algorithmes. Dunod, Paris, (1971).

J. CEA -A. GIOAN -J. MICHEL

[1] Quelques résultats sur l'identification de domaines. Calcolo (1973)

D. CHENAIS

[1] Un résultat d'existence dans un problème d'identification de domaines. C.R. Acad. Sc. Paris t.276 Série A (1973).

[2] On the existence of a solution in a domain identification problem.
A paraitre au J. of Math. Analysis and Appl.

J. DENY - J.L. LIONS

[1] Les espaces du type Beppo-Levi. Ann. Inst. Fourier 5 (1953-1954).
pp. 305-370.

P. DESTUYNDER

[1] Etude d'un algorithme numérique en optimisation de forme. Thèse ingénieur-docteur, Université Paris VI, (1976).

A. DJADANE

[1] Régularité d'une fonctionnelle de domaines et application à l'analyse numérique d'un problème modèle. Thèse 3ème cycle, Alger (1975).

P.R. GARABEDIAN - H. LEWY - M. SCHIFFER

[1] Axially symmetric cavitation flow. Annals of Math. 56 (1952)
pp. 560-602.

P.R. GARABEDIAN - M. SCHIFFER

[1] Convexity of domain functionals. J. d'Analyse Math. 2(1952-53)
pp. 281-368.

[2] Variational Problems in the Theory of Elliptic Partial Differential Equations. J. of Rat. Mech. and Analysis 2 (1953) pp. 137-171.

P.R. GARABEDIAN - D.C. SPENCER

- [1] Extremal Methods in Cavitational Flow. J. of Rat. Mech. and Analysis 1 (1952) pp. 359-409.

A. GIOAN

- [1] Une méthode d'approximations successives pour l'identification de domaines. Thèse 3ème cycle, Nice (1974).

J. HADAMARD

- [1] Mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées (1907). Oeuvres de J. HADAMARD, Ed. du C.N.R.S. Paris (1968) Vol. 2.

N.J. HICKS

- [1] Notes on differential geometry. Van Nostrand (1965).

D.D. JOSEPH

- [1] Parameter and domain dependance of eigenvalues of elliptic partial differential equations. Arch. Rat. Mech. Analysis 24 (1967) pp. 325-351.

D.D. JOSEPH - R.L. FOSDICK

- [1] The free surface of a liquid between cylinders rotating at different speeds. Arch. Rat. Mech. Analysis 49 - 5 (1973) pp. 321-401.

M. KOENIG - J.P. ZOLESIO

- [1] Localisation d'un objet de forme convexe donnée. C.R. Acad.Sc. Paris t. 274 Série A (1972).
- [2] Sur la localisation d'un domaine de forme donnée. Thèse 3ème cycle, Nice (1973).

A.N. KRAIKO - N.I. TILLIAEVA

- [1] On constructing the contour of minimum wave drag in an inhomogeneous supersonic flow. J. of Applied Math. and Mech.(P.M.M.) vol. 37-3 (1973) pp. 449-467.

J.P. LICARI - W.H. WARNER

- [1] Domain dependance of eigenvalues of vibrating plates .SIAM J. of Applied Math. 24-3 (1973) pp. 383-395.

J.L. LIONS

- [1] Some aspects of the optimal control of distributed parameter systems. Regional Conference Series in Applied Math. Philadelphia . SIAM Publication n°6 (1972).

J. MICHEL

- [1] Une méthode de gradient pour l'identification de domaines. Thèse 3ème cycle, Nice (1974).

J. MIELE

- [1] Theory of optimum aerodynamic shapes. Academic Press (1965).

P. MORICE

- [1] Une méthode d'optimisation de forme de domaine. Application à l'écoulement stationnaire à travers une digue poreuse. Lecture Notes in Economics and Math. Systems, (107)pp. 454-467.

U. MOSCO

- [1] Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities. Advances in Mathematics, Vol. 3 n° 4 (oct. 1969) New York.

F. MURAT - J. SIMON

- [1] Quelques résultats sur le contrôle par un domaine géométrique. Publications du Laboratoire d'Analyse Numérique (L.A. 189) Université Paris VI(1974).

J. NECAS

- [1] Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques
Masson, Paris (1967).

B. PALMERIO - A. DERVIEUX

- [1] Identification de frontière dans le cas d'un problème de Dirichlet. C.R. Acad. Sc. Paris t. 275 Série A (1972).
- [2] Identification de domaines et problèmes de frontière libre.
Thèse 3ème cycle, Nice (1974).
- [3] Une formule de Hadamard dans des problèmes d'identification de domaines. C.R. Acad. Sc. Paris t. 280 Série A (1975).

O. PIRONNEAU

- [1] On optimum profiles in Stokes Flow. J. Fluid Mech. 59 (1973)
pp. 117-128.
- [2] On optimum design in Fluid Mechanics. J. Fluid Mech. 64 (1974)
pp. 97-111.

B. ROUSSELET

- [1] Problèmes inverses de valeurs propres. Proceedings of the 7th IFIP Conference on Optimization Techniques. J. CEA Ed. Lectures Notes in Computer Science, n° 41, Springer Verlag (1976) pp 77-85.

L. SCHWARTZ

- [1] Analyse et Topologie générale. Cours à l'Ecole Polytechnique.
Hermann, Paris (1970).

D.E. VARBERG

- [1] Change of variables in multiple integral. Amer. Math. Monthly
78 (1971) pp. 42-45.