C. R. Acad. Sci. Paris, t. 316, Série I, p. 1167-1172, 1993

Analyse mathématique/*Mathematical Analysis*

Démonstration constructive d'un théorème de G. de Rham

Jacques SIMON

Résumé – On donne une démonstration constructive d'un résultat de G. de Rham qui assure l'existence d'une primitive de toute distribution $q=(q_1, \ldots, q_d)$ s'annulant sur les fonctions test à divergence nulle. Des primitives locales sont construites explicitement en utilisant une propriété de symétrie des dérivées et une convolution locale, puis elles sont recollées en utilisant des fonctions test particulières.

A constructive proof of a theorem of G. de Rham

Abstract – *By a theorem of G. de Rham, any distribution $q=(q_1, \ldots, q_d)$ which cancels on all test functions with null divergence possesses an antiderivative. A constructive proof is given here: using a symmetry property of derivatives and a local convolution, local antiderivatives are given explicitely, and they are glued together by using suitable test functions.*

Abridged English Version – Let $q \in \mathscr{D}'(\Omega)^d$, where Ω is an open subset of $\mathbb{R}^d$, be such that

(1) $$\langle q, \psi \rangle_{\mathscr{D}'(\Omega)^d \times \mathscr{D}(\Omega)^d} = 0, \qquad \forall \psi \in \mathscr{D}(\Omega)^d \text{ such that } \nabla . \psi = 0.$$

J.-L. Lions ([1], p. 67) noticed that a theorem of G. de Rham ([2], thm. 17', p. 114) implies the existence of $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$ such that
$$q = \nabla f.$$

We give here a new proof of this result, which plays an essential rôle in existence proofs of solutions of Navier-Stokes equations ([1], [3]).

OUTLINES OF THE PROOF. – At first we observe that (1) implies, for all i and j,

(2) $$\partial_i q_j = \partial_j q_i.$$

In a second step, given a distribution $v \in \mathscr{D}'(\Omega)$ and a distribution $\mu \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ with support in a ball $B = \{x : |x| < r\}$, we define their local convolution $v \underset{\text{loc}}{*} \mu \in \mathscr{D}'(\Omega_{2r})$, where $\Omega_r = \{x : \text{ball}(x, r) \subset \Omega\}$, by
$$v \underset{\text{loc}}{*} \mu = \widetilde{\alpha v} * \mu |_{\Omega_{2r}}$$
where α is any function in $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$ such that $\alpha \equiv 1$ on Ω_r and support $\alpha \subset \Omega$, and $\tilde{}$ is the extension by 0.

In a third step, we construct an antiderivative F in a subset $\omega \subset \Omega_{2r}$ which is star-shaped with respect to a point a. Using a distribution γ and a smooth function η, whose supports are in B, satisfying $-\Delta\gamma = \delta - \eta$, we define a smooth function $h \in \mathscr{C}^\infty(\omega)$ and a distribution $\mathrm{F} \in \mathscr{D}'(\omega)$ by
$$h(x) = \int_0^1 \sum_{k=1}^d (x-a)_k (q_k \underset{\text{loc}}{*} \eta)(a + t(x-a))\, dt,$$
$$\mathrm{F} = h - \sum_{k=1}^d q_k \underset{\text{loc}}{*} \partial_k \gamma.$$
Using (2), we prove that $\nabla \mathrm{F} = q$ in ω.

Note présentée par Philippe G. CIARLET.

0764-4442/93/03161167 $ 2.00 © Académie des Sciences

Next step is devoted to the construction of a smooth test function $\psi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^d)^d$. Given L a closed path in Ω and $\rho \in \mathscr{D}(\mathrm{B})$,

$$\Psi(x) = \int_{\mathrm{L}} \rho(l-x)\,dl,$$

satisfies $\nabla . \Psi = 0$ and support $\Psi \subset \mathrm{L}+\mathrm{B}$.

In the last step, we consider a sequence of local antiderivatives F_n in cubes Q_n covering Ω. Using condition (1) for test function Ψ (related on L and ρ depending on n), which yields

$$\langle q, \Psi \rangle = \int_{\mathrm{L}} q \underset{\mathrm{loc}}{*} \check{\rho} . dl = 0$$

($\check{\rho}(x) = \rho(-x)$), we prove the existence of real numbers c_n such that the $\mathrm{F}_n + c_n$ have a recollection f. It satisfies $\nabla f = q$ in all of Ω.

On se propose de donner une nouvelle démonstration, constructive, du résultat suivant.

THÉORÈME. — *Soit $q \in \mathscr{D}'(\Omega)^d$, où Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, tel que*

$$\langle q, \psi \rangle_{\mathscr{D}'(\Omega)^d \times \mathscr{D}(\Omega)^d} = 0, \qquad \forall \psi \in \mathscr{D}(\Omega)^d \quad \textit{tel que} \quad \nabla . \psi = 0. \tag{1}$$

Alors, il existe $f \in \mathscr{D}'(\Omega)$ tel que $q = \nabla f$. □

J.-L. Lions ([1], p. 67) a observé que c'est une conséquence simple d'une propriété générale, et profonde, des courants due à G. de Rham ([2], théorème 17', p. 114). La méthode de J.-L. Lions pour en déduire ce théorème est indiquée par R. Temam ([3], note (1), p. 74).

Ce résultat joue un rôle crucial dans la démonstration d'existence de solutions des équations de Navier-Stokes : une fois établie l'existence d'une solution de l'équation variationnelle sur la vitesse seule, il permet d'obtenir l'existence d'une pression associée à cette vitesse satisfaisant les équations générales ([1], [3]).

Pour ces équations, on a seulement besoin du résultat pour $q \in \mathrm{H}^{-1}(\Omega)^d$. Une démonstration dans ce cas particulier, ne faisant pas appel à la théorie des courants, a été donnée par L. Tartar ([4], lemme 9, p. 30). Elle est utilisée dans les principaux ouvrages sur ces équations ([3], p. 20, [5], théorème 2.3, p. 25).

On va donner une nouvelle démonstration de ce théorème, qui présente l'intérêt d'être constructive, c'est-à-dire de donner explicitement une primitive. Elle est plus simple et elle donne un résultat plus général que celle de L. Tartar. Elle est également plus accessible que la démonstration de G. de Rham, qui en fait donne un résultat beaucoup plus général relatif à des courants sur une variété.

La démonstration se fera en cinq étapes : — vérification d'une propriété de symétrie des dérivées; — convolution locale; — construction d'une primitive locale explicite; — construction de fonctions test à divergence nulle; — raccordement des primitives locales.

1. SYMÉTRIE DES DÉRIVÉES. — Pour construire les primitives locales, on utilisera la propriété suivante.

LEMME. — *La condition* (1) *entraîne*

$$\partial_i q_j = \partial_j q_i, \qquad \forall i, \quad \forall j. \quad \square \tag{2}$$

Démonstration. — Étant donnés $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$ et $i \neq j$, on définit $\psi \in \mathscr{D}(\Omega)^d$ par $\psi_i = \partial_j \varphi$, $\psi_j = -\partial_i \varphi$, $\psi_k = 0$ sinon. On a $\nabla . \psi = \partial_i(\partial_j \varphi) + \partial_j(-\partial_i \varphi) = 0$.

Alors, (1) s'écrit

$$\langle q, \psi \rangle = \langle q_i, \partial_j \varphi \rangle + \langle q_j, -\partial_i \varphi \rangle = 0,$$

c'est-à-dire $\langle -\partial_j q_i + \partial_i q_j, \varphi \rangle = 0$. Ceci pour tout φ, ce qui prouve (2). □

2. Convolution locale. — Soient $r>0$, $\Omega_r = \{x : \text{boule } (x, r) \subset \Omega\}$, et $\alpha \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ une fonction de localisation telle que $\alpha \equiv 1$ sur Ω_r et support $\alpha \subset \Omega$.

Étant donnés $v \in \mathscr{D}'(\Omega)$ et $\mu \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ tel que support $\mu \subset B$, où $B = \{x : |x| < r\}$, on définit $v \underset{\text{loc}}{*} \mu \in \mathscr{D}'(\Omega_{2r})$ par

$$v \underset{\text{loc}}{*} \mu = \widetilde{\alpha v} * \mu|_{\Omega_{2r}}$$

où $\widetilde{\alpha v} \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)$ est le prolongé par 0 (défini par $\langle \widetilde{\alpha v}, \varphi \rangle_{\mathbb{R}^d} = \langle v, \alpha\varphi \rangle_\Omega$ pour tout φ).

Lemme. — *La convolée locale ne dépend pas du choix de α. Elle se conserve par restriction, c'est-à-dire $v|_\omega \underset{\text{loc}, \omega}{*} \mu = v \underset{\text{loc}, \Omega}{*} \mu|_{\omega_{2r}}$. Elle vérifie*

$$\partial_j (v \underset{\text{loc}}{*} \mu) = \partial_j v \underset{\text{loc}}{*} \mu = v \underset{\text{loc}}{*} \partial_j \mu. \quad □ \tag{3}$$

Démonstration. — Par un argument de continuité en v et μ, il suffit de vérifier ces propriétés pour des fonctions régulières, ce qui est immédiat car alors

$$(v \underset{\text{loc}}{*} \mu)(x) = \int_{|y|<r} v(x-y)\, \mu(y)\, dy$$

pour tout $x \in \Omega_{2r}$, puisque $\alpha(x-y) = 1$.

Pour (3), il suffit d'observer que $\partial_j (\widetilde{\alpha v} * \mu) = \widetilde{\alpha v} * \partial_j \mu = \widetilde{\alpha \partial_j v} * \mu + \widetilde{(\partial_j \alpha) v} * \mu$ et que $\widetilde{(\partial_j \alpha) v} * \mu = 0$ dans Ω_{2r}.

3. Primitive locale. — Soit ξ la fonction définie dans $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ par

$$\xi(x) = \frac{1}{(d-2)\,|S^{d-1}|} |x|^{2-d} \quad \text{si } d \neq 2, \qquad \left(= \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|x|} \text{ si } d = 2 \right).$$

C'est une solution élémentaire de l'équation de Laplace, $-\Delta\xi = \delta$, où δ est la masse de Dirac en 0. Soient $\theta \in \mathscr{D}(B)$, tel que $\theta \equiv 1$ dans $\{x : |x| \leq r/2\}$, et

$$\gamma = \theta\xi, \qquad \text{(solution locale, dite paramétrix),}$$
$$\eta = 2 \nabla\theta . \nabla\xi + \xi \Delta\theta, \qquad \text{(terme correcteur).}$$

La distribution γ est à support dans B, $\eta \in \mathscr{D}(B)$, et

$$-\Delta\gamma = \delta - \eta.$$

On se donne enfin un ouvert $\omega \subset \Omega_{2r}$ étoilé par rapport à un point a. Comme $q_k \underset{\text{loc}}{*} \eta \in \mathscr{C}^\infty(\Omega_{2r})$, on définit une fonction $h \in \mathscr{C}^\infty(\omega)$ et une distribution $F \in \mathscr{D}'(\omega)$ par

$$h(x) = \int_0^1 \sum_{k=1}^d (x-a)_k (q_k \underset{\text{loc}}{*} \eta)(a + t(x-a))\, dt,$$

$$F = h - \sum_{k=1}^d q_k \underset{\text{loc}}{*} \partial_k \gamma.$$

Lemme. — *La distribution* F *est une primitive de q dans ω, c'est-à-dire*

$$\nabla F = q \quad \textit{dans } \omega. \quad □$$

Démonstration. — Calculons $\partial_j h$ en un point $x\in\Omega_{2r}$. Comme $q_k \underset{\text{loc}}{*} \eta$ est $\mathscr{C}^\infty$, on a

$$(\partial_j h)(x)=\int_0^1\left[(q_j \underset{\text{loc}}{*} \eta)(a+t(x-a))+\sum_{k=1}^{d}(x-a)_k\, t\, \partial_j(q_k \underset{\text{loc}}{*} \eta)(a+t(x-a))\right]dt.$$

L'hypothèse $\partial_j q_k=\partial_k q_j$ entraîne, avec (3),

$$\partial_j(q_k \underset{\text{loc}}{*} \eta)=\partial_j q_k \underset{\text{loc}}{*} \eta=\partial_k q_j \underset{\text{loc}}{*} \eta=\partial_k(q_j \underset{\text{loc}}{*} \eta)\quad \text{dans } \Omega_{2r},$$

d'où

$$\begin{aligned}(\partial_j h)(x)&=\int_0^1\left[(q_j \underset{\text{loc}}{*} \eta)(a+t(x-a))+\sum_{k=1}^{d} t(x-a)_k\,\partial_k(q_j \underset{\text{loc}}{*} \eta)(a+t(x-a))\right]dt\\&=\int_0^1 \frac{d}{dt}[t(q_j \underset{\text{loc}}{*} \eta)(a+t(x-a))]\,dt\\&=(q_j \underset{\text{loc}}{*} \eta)(x).\end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant à nouveau (3) et l'hypothèse $\partial_j q_k=\partial_k q_j$, il vient

$$\partial_j(q_k \underset{\text{loc}}{*} \partial_k\gamma)=\partial_j q_k \underset{\text{loc}}{*} \partial_k\gamma=\partial_k q_j \underset{\text{loc}}{*} \partial_k\gamma=q_j \underset{\text{loc}}{*} \partial_k^2\gamma\quad \text{dans } \Omega_{2r}.$$

Avec l'égalité précédente ceci donne, dans ω,

$$\partial_j \mathrm{F}=q_j \underset{\text{loc}}{*} \eta-q_j \underset{\text{loc}}{*} \sum_{k=1}^{d}\partial_k^2\gamma=q_j \underset{\text{loc}}{*}(\eta-\Delta\gamma)=q_j \underset{\text{loc}}{*} \delta=q_j$$

ce qui démontre le lemme. □

4. Fonctions test à divergence nulle. — Pour raccorder les primitives locales, on va utiliser une fonction test Ψ à divergence nulle définie de la façon suivante.

Lemme. — *Soient* L *un lacet de* $\mathbb{R}^d$ *et* $\rho\in\mathscr{D}(\mathrm{B})$.

(i) *On définit une distribution* $\mathrm{T}\in\mathscr{D}'(\mathbb{R}^d)^d$ *par*

$$\langle \mathrm{T},\phi\rangle=\int_{\mathrm{L}}\phi\,.\,dl,\qquad \forall\phi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)^d.$$

Elle vérifie $\nabla.\mathrm{T}=0$ *et* support $\mathrm{T}=\mathrm{L}$.

(ii) *On définit une fonction* $\Psi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)^d$ *par*

$$\Psi(x)=\int_{\mathrm{L}}\rho(l-x)\,dl.$$

Elle vérifie $\Psi=\mathrm{T}*\check{\rho}$, *où* $\check{\rho}(x)=\rho(-x)$, $\nabla.\Psi=0$, *et* support $\Psi\subset\mathrm{L}+\mathrm{B}$. □

Démonstration. — Pour tout $\varphi\in\mathscr{D}(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\langle\nabla.\mathrm{T},\varphi\rangle=-\langle\mathrm{T},\nabla\varphi\rangle=-\int_{\mathrm{L}}\nabla\varphi\,.\,dl=0$$

donc $\nabla.\mathrm{T}=0$. Les autres propriétés sont élémentaires. □

5. Primitive globale. — Supposons que Ω est connexe, et choisissons une suite de cubes Q_n de réunion Ω, tels que $\bar{\mathrm{Q}}_n\subset\Omega$ et $\mathrm{Q}_n\cap\mathrm{Q}_{n+1}\neq\varnothing$ pour chaque n.

Dans chaque Q_n la partie 3 (avec r dépendant de n) donne une primitive locale F_n. On va montrer, par itérations, qu'on peut trouver c_n tel que les F_n+c_n aient un recollement f, qui sera la primitive cherchée.

Supposons donc qu'on ait un recollement f_{n-1}, tel que $\nabla f_{n-1}=q$ dans $Q_1 \cup \ldots \cup Q_{n-1}=\omega_{n-1}$. Admettons un instant que

(4) $$f_{n-1}-F_n \text{ est constant dans } \omega_{n-1} \cap Q_n.$$

Alors, en appelant c_n cette constante, f_{n-1} et F_n+c_n ont un recollement f_n dans $\omega_n=Q_1 \cup \ldots \cup Q_n$. Donc par itérations ceci est vrai pour tout n, ce qui donne un recollement f, et donc une primitive, dans tout Ω.

Il reste à vérifier (4). En fait $f_{n-1}-F_n$ est constant sur chaque composante connexe de $\omega_{n-1} \cap Q_n$, puisque son gradient est nul. On se donne a et b dans deux composantes connexes différentes, et on va calculer

$$c=(f_{n-1}(b)-F_n(b))-(f_{n-1}(a)-F_n(a))$$

en se ramenant au cas de fonctions continues en convolant localement par une fonction régulière (dépendant de n) $\rho \in \mathscr{D}(B)$ telle que $\int_B \rho=1$.

Pour r assez petit, $f_{n-1}-F_n$ est constant dans la boule de centre a et de rayon r, donc $((f_{n-1}-F_n) \underset{\text{loc}}{*} \rho)(a)=(f_{n-1}-F_n)(a)$. Avec le même calcul en b, il vient

$$c=(f_{n-1} \underset{\text{loc}}{*} \rho)(b)-(f_{n-1} \underset{\text{loc}}{*} \rho)(a)+(F_n \underset{\text{loc}}{*} \rho)(a)-(F_n \underset{\text{loc}}{*} \rho)(b).$$

Soit L_1 un chemin reliant a à b dans ω_{n-1}, et supposons r assez petit pour que $L_1 \subset (\omega_{n-1})_{2r}$. D'après (3) et la propriété de restriction de la convolution locale, on a

$$(f_{n-1} \underset{\text{loc}}{*} \rho)(b)-(f_{n-1} \underset{\text{loc}}{*} \rho)(a)=\int_{L_1} \nabla(f_{n-1} \underset{\text{loc}}{*} \rho).dl=\int_{L_1} q \underset{\text{loc}}{*} \rho.dl,$$

et, de même, si L_2 est un chemin reliant b à a dans Q_n et si r est assez petit,

$$(F_n \underset{\text{loc}}{*} \rho)(a)-(F_n \underset{\text{loc}}{*} \rho)(b)=\int_{L_2} \nabla(F_n \underset{\text{loc}}{*} \rho).dl=\int_{L_2} q \underset{\text{loc}}{*} \rho.dl$$

donc, en notant $L=L_1 \cup L_2$, qui est un lacet, il vient

$$c=\int_L q \underset{\text{loc}}{*} \rho.dl=\langle T, \widetilde{\alpha q} * \rho \rangle_{\mathbb{R}^d}.$$

Pour toutes distributions T et v, on a $\langle T, v * \rho \rangle=\langle v, T * \check{\rho} \rangle$, donc

$$c=\langle \widetilde{\alpha q}, T * \check{\rho} \rangle_{\mathbb{R}^d}=\langle q, \alpha(T * \check{\rho}) \rangle_\Omega=\langle q, T * \check{\rho} \rangle_\Omega.$$

car $\alpha \equiv 1$ sur $L+B$ donc sur le support de $T * \check{\rho}$.

Comme on l'a vu, $\nabla.(T * \check{\rho})=0$, donc l'hypothèse (1) entraîne $c=0$, ce qui termine la démonstration du théorème lorsque Ω est connexe.

Lorsque Ω n'est pas connexe, on obtient ainsi une primitive dans chaque composante connexe; leur ensemble est une primitive dans tout Ω.

Compléments. — *Expression* a priori *des primitives locales.* — La construction d'une primitive locale F faite ci-dessus peut paraître mystérieuse au lecteur. Pour trouver F, nous sommes partis de la formule de représentation d'une distribution sur tout $\mathbb{R}^d$ par ses dérivées de L. Schwartz ([6], VI.6.8, p. 183), généralisant une formule de Kryloff [7],

$$F=F * \eta-\sum_k \partial_k F * \partial_k \gamma,$$

et nous avons observé que

$$(\mathrm{F} * \eta)(x)-(\mathrm{F} * \eta)(a)=\int_0^1 \sum_k (x-a)_k (\partial_k \mathrm{F} * \eta)(a+t(x-a))\,dt.$$

Nous avons obtenu l'expression *a priori* de F en fonction de ses dérivées q_k, utilisée dans la démonstration, en remplaçant dans ces deux formules $\partial_k \mathrm{F}$ par q_k et en remplaçant $(\mathrm{F} * \eta)(a)$ par 0 (puisque les primitives sont définies à une constante près).

Dans le cas de distributions définies sur un ouvert Ω, donc non nécessairement prolongeables, nous avons généralisé ces formules à l'aide de la convolution locale.

Primitive globale. — La convolution locale n'étant pas définie au voisinage du bord de Ω, elle ne peut pas permettre de construire explicitement une primitive globale. Une opération plus générale, la pondération est introduite dans [8]. Elle permet de construire, dans un ouvert lipschitzien, une primitive globale en un nombre fini de morceaux.

Des cas simples. — Pour certains ouverts, on peut raccorder les primitives locales sans les calculs des parties 5 et 6. Donnons deux exemples.

Lorsque $\Omega=\mathbb{R}^d$, on peut dans la partie 3 prendre $\omega=\mathbb{R}^d$, auquel cas la primitive locale F est, en fait, une primitive globale. Ici, la convolution ordinaire suffit.

Lorsque Ω est étoilé, on peut le recouvrir par une suite croissante de ω_n étoilés tels que $\bar{\omega}_n \subset \Omega$ [en choisissant $0 \in \Omega$ et $\omega_n=(1-1/n)\Omega$]. Dans chaque ω_n on a une primitive locale F_n. Dans ω_{n-1}, qui est connexe, $\mathrm{F}_{n-1}-\mathrm{F}_n$ est constant, disons c_n, donc les F_n+c_n ont un recollement f dans tout Ω, qui est la primitive cherchée.

Dans ces deux cas, l'hypothèse (2) de symétrie des dérivées suffit à assurer l'existence d'une primitive. Ceci est vrai dans tout ouvert simplement connexe, comme on le redémontre dans [8].

Note remise le 1er mars 1993, acceptée après révision le 31 mars 1993.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] J.-L. LIONS, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Gauthier-Villars, 1969.

[2] G. DE RHAM, *Variétés différentiables*, Hermann, 1960.

[3] R. TEMAM, *Navier-Stokes equations*, North-Holland, 1984.

[4] L. TARTAR, *Topics in non linear analysis*, Publ. Math. d'Orsay, 1978.

[5] V. GIRAULT et P.-A. RAVIART, *Finite elements methods for Navier-Stokes equations*, Springer-Verlag, 1986.

[6] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*, Hermann, 1966.

[7] KRYLOFF, Sur l'existence des dérivées généralisées des fonctions sommables, *C. R. Sci. Acad. URSS*, 55, 1947, p. 375-378.

[8] J. SIMON, Representation of distributions and explicit antiderivatives up to the boundary. In *Proceedings of Metz days*, M. CHIPOT et J. SAINT JEAN PAULIN éd., Research Notes in Mathematics, Pitman, 1993.

Laboratoire de Mathématiques Appliquées,
Université Blaise Pascal, Clermont-Ferrand-II et CNRS,
63177 *Aubière Cedex, France.*