ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Écoulement d'un fluide non homogène avec une densité initiale s'annulant.* Note (*) de **Jacques Simon,** présentée par M. Jacques-Louis Lions.

Dans [1] Antonzev et Kajikov donnent un résultat d'existence pour l'écoulement d'un fluide incompressible à densité variable ρ, en supposant la densité initiale ρ_0 strictement positive. On se propose d'étendre ce résultat pour $\rho_0 \geqq 0$. On reprend le principe de démonstration de [1] en utilisant un théorème de compacité plus général, qui permet de passer à la limite dans l'approximation de Semi-Galerkine avec des estimations plus faibles.

We extend a result of Antonzev and Kajikov [1] relative to non homogeneous flows to the case of an initial density which can be zero. The proof is as in [1] together with a new compactness Lemma.

1. Position du problème et résultat d'existence. — Étant donné Ω un ouvert borné de R^3 on note

$$\mathscr{V} = \{ v \mid v \in (C^\infty(\Omega))^3, \text{ support } v \subset \Omega, \text{ div } v = 0 \},$$

V, adhérence de $\mathscr{V}$ dans $(H^1(\Omega))^3$, où

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \mid v, \frac{\partial v}{\partial x_j} \in L^2(\Omega) \right\},$$

H, adhérence de $\mathscr{V}$ dans $(L^2(\Omega))^3$,

$$\Psi = \left\{ \psi \mid \psi \in L^2(0, T; V), \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} \in L^\infty(0, T; L^{3/2}(\Omega)), \right.$$
$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial t} \in L^2(0, T; (L^{6/5}(\Omega))^3), \psi(T) = 0 \right\}, \quad \text{où} \quad T > 0,$$

$$a(u, v) = \mu \sum_{i, j} \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx, \quad \text{où } \mu > 0 \text{ donné}, \quad \forall u, \quad v \in (H^1(\Omega))^3$$

$$(g, v) = \sum_i \int_\Omega g_i v_i \, dx, \quad \forall g, \quad v \in (L^2(\Omega))^3.$$

On se donne

$$(1.1) \qquad f \in L^2(0, T; H), \quad u_0 \in H, \quad \rho_0 \in L^\infty(\Omega), \quad \rho_0 \geqq 0,$$

et on cherche des fonctions $u = \{ u_1, u_2, u_3 \}$ et ρ définies dans $Q = \Omega \times]0, T[$, vérifiant :

$$(1.2) \qquad u \in L^2(0, T; V), \qquad \rho \in L^\infty(Q),$$

$$(1.3) \qquad -\int_0^T \left(\rho u, \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) dt - \sum_{i, j} \int_Q \rho u_i u_j \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} dx dt$$
$$+ \int_0^T a(u, \psi) \, dt = \int_0^T (\rho f, \psi) \, dt + (\rho_0 u_0, \psi(0)), \qquad \forall \psi \in \Psi,$$

$$(1.4) \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho u) = 0,$$

$$\rho(0)=\rho_0. \tag{1.5}$$

THÉORÈME. — *Sous les hypothèses* (1.1) *il existe des fonctions* u *et* ρ *vérifiant* (1.2) *à* (1.5) *et*

$$\rho \geqq 0, \qquad \sqrt{\rho}\, u \in L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^3). \tag{1.6}$$

2. DÉMONSTRATION PARTIELLE. — On se donne une famille $\{V^m\}$ de sous-espaces de dimension m de V, croissante et dense dans V, avec $V^m \subset (C^1(\overline{\Omega}))^3$. On définit des solutions approchées u^m, ρ^m par

$$u^m(t) \in V^m,$$

$$\left(\rho^m \frac{\partial u^m}{\partial t}, v\right) = \sum_{j,i} \int \rho^m u_j^m \frac{\partial u_i^m}{\partial x_j} v_i\, dx + a(u^m, v) = (\rho^m f, v), \qquad \forall v \in V^m, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \rho^m}{\partial t} + \sum_j u_j^m \frac{\partial \rho^m}{\partial x_j} = 0, \tag{2.2}$$

$$u^m(0) = u_0^m, \qquad \text{où} \quad u_0^m \in V^m, \quad u_0^m \to u_0 \text{ dans V quand } m \to \infty,$$

$$\rho^m(0) = \rho_0^m, \qquad \text{où} \quad \rho_0^m \in C^1(\overline{\Omega}), \quad \frac{1}{m} \leqq \rho_0^m \leqq c, \quad \rho_0^m \to \rho_0 \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ quand } m \to \infty.$$

D'après ([1]) ce système admet une solution, avec (indépendamment de m) : ρ^m est borné dans $L^\infty(Q)$, $\rho^m \geqq 0$,

(2.3) u^m est borné dans $L^2(0, T; V)$ (donc dans $L^2(0, T; (L^6(\Omega))^3)$),

(2.4) $\sqrt{\rho^m}\, u^m$ est borné dans $L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^3)$.

On peut donc extraire des sous-suites telles que $\rho^n \to \rho$ dans $L^\infty(Q)$ faible*,

$$u^n \to u \quad \text{dans } L^2(0, T; V) \text{ faible}, \tag{2.5}$$

$$\rho^n u^n \to \alpha \quad \text{dans } L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^3) \text{ faible*}, \tag{2.6}$$

$$\rho^n u_i^n u_j^n \to \beta_{i,j} \quad \text{dans } L^2(0, T; L^{3/2}(\Omega)) \text{ faible}.$$

D'après ([1]) les équations (2.1) et (2.2) entraînent que u^m, ρ^m vérifient (1.3) pour tout $\psi \in C^1(0, T; V^m)$ tel que $\psi(T)=0$. En passant à la limite dans cette équation et dans (2.2) on obtient les équations (1.3) et (1.4) sous réserve de passer à la limite dans les termes non linéaires, i. e. de montrer que

$$\alpha = \rho u, \tag{2.7}$$

$$\beta_{i,j} = \rho u_i u_j. \tag{2.8}$$

D'après (2.2) $\partial \rho^m / \partial t$ est borné dans $L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$, et un résultat de compacité de ([2]) montre que

$$\rho^n \to \rho \quad \text{dans } L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \text{ fort},$$

ce qui, avec (2.5), entraîne (2.7).

On en déduit également que $\rho^n(0) \to \rho(0)$ dans $H^{-1}(\Omega)$, d'où (1.5).

3. UN RÉSULTAT DE COMPACITÉ. — On se donne trois espaces de Banach tels que

$$\begin{cases} B_0 \subset B \subset B_1 \text{ (avec injections continues), } B_0 \text{ et } B_1 \text{ sont réflexifs,} \\ \text{l'injection } B_0 \to B \text{ est compacte,} \end{cases} \tag{3.1}$$

une fonction δ de R_+ dans R_+ telle que

$$\delta(h) \to 0 \quad \text{quand } h \to 0,$$

et $1<p<\infty$. On note

$$W = \left\{ v \mid v \in L^p(0,\, T;\, B_0),\ \operatorname*{Sup\,ess}_{0<h<T} \frac{1}{\delta(h)} \| v_h - v \|_{L^p(0,\, T-h;\, B_1)} < \infty \right\},$$

où $v_h(t) = v(t+h)$.

L'espace W étant muni de sa norme naturelle on a le :

LEMME. — *L'injection de* W *dans* $L^p(0,\, T;\, B)$ *est compacte.*

MAJORATION LIMINAIRE. — Étant donné $v \in L^p(0,\, T;\, B_1)$ et $0<h \leqq T$ on définit $M_h v$ par

$$(M_h v)(t) = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} v(s)\, ds \qquad \text{pour} \quad 0 \leqq t \leqq T-h.$$

On a

$$\| v \|_{L^p(0,\, T;\, B_1)} \leqq 3 \sup_{0 \leqq k \leqq h} \| v_k - v \|_{L^p(0,\, T-k;\, B_1)} + 2 \| M_h v \|_{L^p(0,\, T-h;\, B_1)}. \tag{3.2}$$

En effet

$$(v - M_h v)(t) = \frac{1}{h} \int_0^h (v - v_k)(t)\, dk$$

donc

$$\begin{aligned} \| v - M_h v \|_{L^p(0,T-h;\,B_1)} &\leqq \left(\frac{1}{h^p} \int_0^{T-h} \left(\int_0^h \| (v_k - v)(t) \|_{B_1} dk \right)^p dt \right)^{1/p} \\ &\leqq \left(\frac{1}{h} \int_0^{T-h} \int_0^h (\| (v_k - v)(t) \|_{B_1})^p\, dk\, dt \right)^{1/p} \\ &\leqq \sup_{0 \leqq k \leqq h} \left(\int_0^{T-k} (\| (v_k - v)(t) \|_{B_1})^p\, dt \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

d'où

$$\| v \|_{L^p(0,T-h;\,B_1)} \leqq \| M_h v \|_{L^p(0,T-h;\,B_1)} + \sup_{0 \leqq k \leqq h} \| v_k - v \|_{L^p(0,T-k;\,B_1)},$$

qui entraîne aisément (3.2).

DÉMONSTRATION DU LEMME. — Il suffit de montrer que si

(3.3) v^n est borné dans W, $v^n \to 0$ dans $L^p(0, T; B_0)$ faible,

alors $v^n \to 0$ dans $L^p(0,\, T;\, B)$.

Étant donné $0<h \leqq T$, on a trivialement

$$\| M_h v^n \|_{L^\infty(0,T-h;\,B_1)} \leqq h^{-1/p} \| v^n \|_{L^p(0,T;\,B_1)},$$

d'où on déduit avec (3.3) que, pour h fixé,

$$M_h v^n \to 0 \quad \text{dans } L^p(0,\, T-h;\, B_1) \text{ quand } n \to \infty.$$

En faisant successivement $n \to \infty$ et $h \to 0$ dans la majoration (3.2) relative à $v = v^n$ il vient donc

$$v^n \to 0 \quad \text{dans } L^p(0, T; B_1) \text{ quand } n \to \infty,$$

et on en déduit la convergence dans $L^p(0, T; B)$ comme dans ([2]) (lemme 5.1, p. 58).

4. Démonstration de (2.8). — En reprenant la démonstration de ([1]) sans minorer ρ^m il vient

$$\left\| \sqrt{(\rho^m)_h}\,((u^m)_h - u^m) \right\|_{L^2(0, T-h; (L^2(\Omega))^3)} \leqq c h^{1/4},$$

où c ne dépend pas de m et h, donc, ρ^m étant borné dans $L^\infty(Q)$:

$$\left\| (\rho^m)_h\,((u^m)_h - u^m) \right\|_{L^2(0, T-h; (L^2(\Omega))^3)} \leqq c h^{1/4}. \tag{4.1}$$

Comme $\partial \rho^m / \partial t$ est borné dans $L^\infty(0, T; H^{-1}(\Omega))$ on a

$$\left\| (\rho^m)_h(t) - \rho^m(t) \right\|_{H^{-1}(\Omega)} \leqq \mathrm{ch} \quad \text{pour} \quad 0 \leqq t \leqq T - h$$

et avec (2.3) il vient [le produit étant continu de $H^{-1}(\Omega) \times \mathring{H}^1(\Omega)$ dans $W^{-1, r}(\Omega)$ pour $r < 3/2$] :

$$\left\| ((\rho^m)_h - \rho^m)\, u^m \right\|_{L^2(0, T-h, (W^{-1, r}(\Omega))^3)} \leqq \mathrm{ch} \quad \text{pour} \quad r < 3/2. \tag{4.2}$$

En additionnant (4.1) et (4.2) il vient

$$\left\| (\rho^m u^m)_h - \rho^m u^m \right\|_{L^2(0, T-h; (W^{-1, r}(\Omega))^3)} \leqq c h^{1/4}.$$

De plus d'après (2.4) $\rho^m u^m$ est borné dans $L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^3)$ donc le lemme montre que la suite $\rho^m u^m$ est relativement compacte dans $L^2(0, T; (H^{-1}(\Omega))^3)$. Avec (2.6) et (2.7) on a donc

$$\rho^n u^n \to \rho u \quad \text{dans } L^2(0, T; (H^{-1}(\Omega))^3) \text{ fort},$$

ce qui, avec (2.5), établit (2.8).

(*) Séance du 20 novembre 1978.

([1]) S. N. Antonzev et A. V. Kajikov, *Étude mathématique d'écoulements de fluides non homogènes*, Novosibirsk, conférences à l'université, 1973.

([2]) J.-L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris, 1968.

Laboratoire associé n° 189, Tour 55-65,
Université Paris-VI, 4, place Jussieu, 75005 Paris.