C. R. Acad. Sci. Paris, t. 309, Série I, p. 447-452, 1989

Analyse mathématique/*Mathematical Analysis*

Sur les fluides visqueux incompressibles et non homogènes

Jacques SIMON

Résumé — On s'intéresse à l'écoulement d'un fluide de densité variable, dont l'état initial est connu. L'existence globale en temps de solutions faibles a été obtenue par Kazhikhov [1], et l'existence locale d'une solution forte et régulière a été obtenue par Ladyzhenskaya et Solonnikov [2], pour des données plus régulières.

On montre ici l'existence globale d'une solution forte, ceci pour des données moins régulières que dans [2]. On montre en outre, avec des données encore moins régulières, et moins régulières que dans [1], l'existence d'une solution vérifiant les équations fortes, à l'exception d'une condition initiale qui est vérifiée au sens faible. Au contraire de [1] et [2], la densité initiale peut ici s'annuler.

On non-homogeneous viscous incompressible fluids

Abstract — *We consider the flow of a non homogeneous viscous incompressible fluid which is known at an initial time. The global (in time) existence of a weak solution was obtained by Kazhikhov* [1], *and the local existence of a strong and regular solution was obtained by Ladyzhenskaya and Solonnikov* [2] *for more regular data.*

We prove here the global existence of a strong solution, and this for less regular data than in [2]. *In addition, with less regular data than above, and than in* [1], *we prove the existence of a solution satisfying the strong equation, with the exception of an initial condition which is satisfied in a weak sense. In contrast with* [1] *and* [2], *the initial density may have some zeros here.*

Abridged English Version — 1. MODEL. — A non-homogeneous fluid is described by its velocity $u=(u_1, u_2, u_3)$, its density ρ and its pressure p, in a domain Ω and in a time interval $]0, T[$. It is modelized by

$$(1)\qquad \rho\frac{\partial u}{\partial t}+\rho(u\cdot\nabla)u-\mu\Delta u=\rho f-\nabla p,\qquad \frac{\partial\rho}{\partial t}+u\cdot\nabla\rho=0,\qquad \nabla\cdot u=0$$

$$(2)\qquad u_{|\Gamma}=0,$$

$$(3)\qquad \rho(0)=\rho_0,\qquad (\rho u)(0)=\rho_0 u_0$$

where Γ is the boundary of Ω, and $\rho(t)$ denotes the function $x\to\rho(t, x)$.

Remark that by setting $\rho\equiv 1$ we get the Navier-Stokes equations.

We denote $\mathcal{V}=\{v\in(\mathcal{D}(\Omega))^3 : \nabla\cdot v=0\}$, and by V and H the closure of $\mathcal{V}$ respectively in $(H^1(\Omega))^3$ and in $(L^2(\Omega))^3$.

2. EXISTENCE RESULTS. — Let us first give the existence of a strong solution.

THEOREM 1. — *Let Ω be bounded with a $W^{2,\infty}$ (or C^2) boundary, and $u_0\in V$, $\rho_0\in L^\infty(\Omega)$, $\rho_0\geqq 0$, $1/\rho_0\in L^{6/5}(\Omega)$, $f\in(L^2(Q))^3$.*

There exist $u\in L^2(0, T; V)$, $\rho\in L^\infty(Q)$, $p\in W^{-1,\infty}(0, T; L^2(\Omega))$ which satisfy the equations (1) *in the distribution sense, the boundary condition* (2) *in the trace sense, and the initial conditions* (3) *since $\rho\in C([0, T]; H^{-1}(\Omega))$ and $\rho u\in C([0, T_*]; (H^{-1}(\Omega))^3)$ for some $T_*>0$.*

Remark. — The assumption $1/\rho_0\in L^{6/5}(\Omega)$ do not allow ρ_0 to be too small. In particular it is satisfied if $\rho_0\geqq\alpha$ in Ω, where α is real and positive. But it allows ρ_0 to have isolated zeros. For example it is satisfied for $\rho_0(x)=|x-x_0|$ or $\rho_0(x)=|x-x_0|^2$.

Note présentée par Jean LERAY.

0249-6291/89/03090447 $ 2.00 © Académie des Sciences

With weaker data we will obtain a solution of the same equations with the exception of the initial condition $(\rho u)(0)=\rho_0 u_0$ which is replaced by

$$\left(\int_\Omega \rho u\cdot v\,dx\right)(0)=\int_\Omega \rho_0 u_0\cdot v\,dx,\qquad \forall v\in \mathrm{V}. \tag{7}$$

THEOREM 2. — *Let Ω be bounded with a Lipschitz boundary, and $u_0\in \mathrm{H}$, $\rho_0\in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$, $\rho_0\geqq 0$, $f\in \mathrm{L}^1(0, \mathrm{T}; (\mathrm{L}^2(\Omega))^3)$.*

There exist $u\in \mathrm{L}^2(0, \mathrm{T}; \mathrm{V})$, $\rho\in \mathrm{L}^\infty(\mathrm{Q})$, $p\in \mathrm{W}^{-1,\infty}(0, \mathrm{T}; \mathrm{L}^2(\Omega))$ which satisfy the equations (1) *in the distribution sense, the boundary condition* (2) *in the trace sense and the initial conditions $\rho(0)=\rho_0$ and* (7) *since $\rho\in \mathrm{C}(0, \mathrm{T}; \mathrm{H}^{-1}(\Omega))$ and $\int_\Omega \rho u\cdot v\,dx\in \mathrm{C}([0, \mathrm{T}])$.*

3. COMPARISON TO PREVIOUS RESULTS. — Ladyzhenskaya and Solonnikov [2] proved the local existence of a strong solution, for the assumptions (10) which are stronger than (4). Their solution is more regular than the present one, and is unique in their regular class. Moreover for small data they have global existence.

Kazhikhov [1] obtained a weak solution u, ρ, for Inf $\rho_0>0$. The reader is reffered to [3]. This result of Kazhikhov was extended to the case $\rho_0\geqq 0$ by the present author [4]. In the same case $\rho_0\geqq 0$, with more regular data, Kim [5] obtained a more regular but only local solution of the weak problem.

For a more general model including diffusion terms, Beirao da Veiga [9] and Kazhikhov and Smagulov [10] obtained results respectively similar to those in [2] and [1]. The present method may possibly be extended to this case.

---

1. MODÈLE. — Mélangeons deux fluides visqueux, incompressibles, parfaitement miscibles et de densités différentes. Ou bien, considérons un fluide visqueux et incompressible avec des matières en suspension. Le fluide obtenu est visqueux, incompressible et non homogène. Il est décrit par sa vitesse $u=(u_1, u_2, u_3)$, par sa densité ρ et par sa pression p, en chaque point x du domaine Ω et pour tout temps t de l'intervalle $[0, \mathrm{T}]$. Lorsque la viscosité ne varie pas avec la densité, l'évolution du fluide est gouvernée par les équations suivantes, dans $\mathrm{Q}=\Omega\times]0, \mathrm{T}[$,

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}+\rho(u\cdot\nabla)u-\mu\Delta u=\rho f-\nabla p,\qquad \frac{\partial\rho}{\partial t}+u\cdot\nabla\rho=0,\qquad \nabla\cdot u=0, \tag{1}$$

où f est la gravité et $\mu>0$ est la viscosité. Le fluide adhérant à la paroi Γ du domaine, vérifie la condition aux limites

$$u_{|\Gamma}=0. \tag{2}$$

Son état à l'instant initial est déterminé par :

$$\rho(0)=\rho_0,\qquad (\rho u)(0)=\rho_0 u_0 \tag{3}$$

où ρ_0 et u_0 sont donnés dans Ω, et $\rho(t)$ désigne la fonction $x\to\rho(x, t)$.

On note $\nabla=(\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ où $\partial_i=\partial/\partial x_i$, et $\cdot$ le produit scalaire dans $\mathbb{R}^3$, donc

$$\nabla\cdot u=\partial_1 u_1+\partial_2 u_2+\partial_3 u_3\qquad\text{et}\qquad \nabla\cdot(u\rho u)=\partial_1(u_1\rho u)+\partial_2(u_2\rho u)+\partial_3(u_3\rho u).$$

Notons que pour $\rho\equiv 1$ on retrouve les équations de Navier-Stokes.

Le domaine Ω est supposé ouvert et borné dans $\mathbb{R}^3$, à frontière lipschitzienne. On note $\mathscr{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions C^∞ à support compact dans Ω, $\mathscr{D}'(\Omega)$ l'espace des distributions et, pour $1 \leqq r \leqq \infty$,

$$W^{1,r}(\Omega) = \{ v \in L^r(\Omega) : \nabla v \in (L^r(\Omega))^3 \},$$

$\mathring{W}^{1,r}(\Omega)$ l'adhérence de $\mathscr{D}(\Omega)$ dans $W^{1,r}(\Omega)$, et

$$W^{-1,r}(\Omega) = \{ v \in \mathscr{D}'(\Omega) : v = w_0 + \partial_1 w_1 + \partial_2 w_2 + \partial_3 w_3,\ w_i \in L^r(\Omega),\ i = 0, 1, 2, 3 \}.$$

On définit de même $W^{2,r}(\Omega)$, et on note $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$, ... Tous ces espaces sont munis de leurs normes naturelles. On note $\mathscr{V}\{ v \in (\mathscr{D}(\Omega))^3 : \nabla \cdot v = 0 \}$, et V et H la fermeture de $\mathscr{V}$ respectivement dans $(H^1(\Omega))^3$ et dans $(L^2(\Omega))^3$.

2. Résultats d'existence. — Commençons par l'existence d'une solution forte.

Théorème 1. — *Supposons que Ω est borné et à frontière $W^{2,\infty}$ (ou C^2) et*

$$u_0 \in V, \qquad \rho_0 \in L^\infty(\Omega), \qquad \rho_0 \geqq 0, \qquad \frac{1}{\rho_0} \in L^{6/5}(\Omega), \qquad f \in (L^2(Q))^3. \tag{4}$$

Il existe

$$u \in L^2(0, T; V), \qquad \rho \in L^\infty(Q), \qquad p \in W^{-1,\infty}(0, T; L^2(\Omega))$$

qui vérifient les équations (1) *au sens des distributions, la condition au bord* (2) *au sens des traces, et les conditions initiales* (3) *au sens où*

$$\rho \in C([0, T]; H^{-1}(\Omega)), \qquad \rho u \in C([0, T_*]; (H^{-1}(\Omega))^3) \qquad \textit{où} \quad T_* > 0.$$

Remarques. — 1. L'hypothèse $1/\rho_0 \in L^{6/5}(\Omega)$ impose que ρ_0 ne soit pas trop petit. En particulier elle est satisfaite si

$$\rho_0 \geqq \alpha \quad \text{dans } \Omega, \qquad \alpha \text{ réel} > 0.$$

Mais elle permet à ρ_0 de s'annuler en des points isolés de Ω. Par exemple elle est vérifiée par $\rho_0(x) = |x - x_0|$, et par $\rho_0(x) = |x - x_0|^2$.

2. La solution obtenue a diverses autres propriétés, dont

$$\operatorname*{Inf}_{\Omega} \rho_0 \leqq \rho \leqq \operatorname*{Sup}_{\Omega} \rho_0, \qquad \rho u \in L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^3). \tag{5}$$

Si $\rho_0 \geqq \alpha$ dans Ω, $\alpha > 0$, il en résulte que

$$\rho \geqq \alpha \quad \text{dans } Q, \qquad u \in L^\infty(0, T; H). \tag{6}$$

3. La solution obtenue est plus régulière sur un intervalle $[0, T_*]$, $T_* > 0$ dépendant des données. En particulier

$$u \in L^2(0, T_*; (H^2(\Omega))^3) \cap L^\infty(0, T_*; V), \qquad p \in L^2(0, T_*; L^6(\Omega)).$$

En outre $t \to u(t)$ est continue en 0 à valeurs dans H, et $u(0) = u_0$.

4. Le terme $\rho\, \partial u / \partial t$ de (1) est défini dans $H^{-1}(0, T; (W^{-1,3/2}(\Omega))^3)$. □

Avec des hypothèses plus faibles on obtient une solution des mêmes équations, à l'exception de la condition initiale $(\rho u)(0) = \rho_0 u_0$ qui est remplacée par

$$\left(\int_\Omega \rho u \cdot v\, dx \right)(0) = \int_\Omega \rho_0 u_0 \cdot v\, dx, \qquad \forall v \in V. \tag{7}$$

Théorème 2. — *Supposons que Ω est borné et à frontière lipschiztienne et*

$$u_0 \in H, \qquad \rho_0 \in L^\infty(\Omega), \qquad \rho_0 \geqq 0, \qquad f \in L^1(0, T; (L^2(\Omega))^3). \tag{8}$$

Il existe

$$u \in L^2(0, T; V). \qquad \rho \in L^\infty(Q), \qquad p \in W^{-1,\infty}(0, T; L^2(\Omega))$$

qui vérifient les équations (1) *au sens des distributions, la condition au bord* (2) *au sens des traces, et les conditions initiales* $\rho(0)=\rho_0$ *et* (7) *au sens où*

$$\rho\in C([0, T]; H^{-1}(\Omega)), \qquad \int_\Omega \rho u\cdot v\,dx\in C([0, T]), \qquad \forall v\in V.$$

3. Comparaison avec les résultats antérieurs. — Ladyzhenskaya et Solonnikov ont obtenu dans [2] l'existence locale, c'est-à-dire pour $T\leqq T_*$, d'une solution forte, sous les hypothèses suivantes qui sont plus fortes que (4) :

$$\text{(9)}\qquad \begin{cases} u_0\in(W^{2-2/q,q}(\Omega))^3\cap V, & \rho_0\in C^1(\bar\Omega), \\ \operatorname*{Inf}_\Omega \rho_0>0, \quad f\in(L^q(Q))^3, & \text{où } q>3. \end{cases}$$

Leur solution est régulière, et unique dans leur classe, et pour des données assez petites l'existence est globale, c'est-à-dire $T_*=T$.

Kazhikhov [1] a obtenu une solution faible u, ρ en supposant, outre (8), que $\operatorname{Inf}\rho_0>0$ et $f\in L^2(0, T; H)$. Dans les équations faibles, la pression est éliminée, et la première équation de (1) et la condition $(\rho u)(0)=\rho_0 u_0$ sont remplacées par : $\forall\varphi\in C^1([0, T]; V)$ tel que $\varphi(T)=0$,

$$\text{(10)}\qquad \int_\Omega\left(-\rho u\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t}-u\rho u\cdot\nabla\varphi+\mu\nabla u\cdot\nabla\varphi-\rho f\cdot\varphi\right)dx\,dt=\int_\Omega \rho_0 u_0\cdot\varphi(0)\,dx.$$

Pour l'exposé de ce résultat nous renvoyons à [3]. L'auteur [4] a étendu ce résultat de Kazhikhov au cas $\rho_0\geqq 0$. Dans le même cas $\rho_0\geqq 0$, avec des données plus régulières, Kim [5] a obtenu une solution plus régulière mais seulement locale des équations réduites.

Pour les mélanges de fluides avec diffusion, ce qui introduit des termes supplémentaires dans les équations, Beirao da Veiga [9] et Kazhikhov et Smagulov [10] ont obtenu des résultats analogues respectivement à ceux de [2] et [1]. On peut espérer que la méthode développée ici s'étende à ce cas.

4. Principe de démonstration du théorème 2. — (i) Dans [4] on a obtenu (théorème) l'existence de u et de ρ ayant toutes les propriétés requises, à l'exception de la première équation (1) et de $(\rho u)(0)=\rho_0 u_0$ qui sont remplacées par l'équation variationnelle (10). En choisissant $\varphi(x, t)=\psi(t)v(x)$ cette équation donne, dans $\mathscr{D}'(]0, T[)$

$$\text{(11)}\qquad \left(\frac{\partial\rho u}{\partial t}+\nabla\cdot(u\rho u)-\mu\Delta u-\rho f, v\right)_{(H^{-1}(\Omega))^3\times(H_0^1(\Omega))^3}=0, \qquad \forall v\in V.$$

Notons $h=(\partial\rho u/\partial t)+\nabla\cdot(u\rho u)-\mu\Delta u-\rho f$. On a $h\in W^{-1,\infty}(0, T; (H^{-1}(\Omega))^3)$.

Du lemme 9, p. 30 de [6], ou du théorème 2.3, p. 25 de [7], on peut déduire, (*cf.* [8]), l'extension suivante du théorème de Rham aux distributions dépendant du temps.

Lemme 3. — *Soit* $g\in\mathscr{D}'(]0, T[; (H^{-1}(\Omega))^3)$ *tel que*

$$(g, v)_{(H^{-1}(\Omega))^3\times(H_0^1(\Omega))^3}=0, \qquad \forall v\in V.$$

Alors il existe $q\in\mathscr{D}'(]0, T[; L^2(\Omega))$ *tel que* $g=\nabla q$. *Si de plus* $g\in W^{s,r}(0, T; (H^{-1}(\Omega))^3)$ *on peut choisir* $q\in W^{s,r}(0, T; L^2(\Omega))$.

Ce lemme donne l'existence de $p\in W^{-1,\infty}(0, T; L^2(\Omega))$ tel que $h=\nabla p$. Avec la deuxième équation de (1) on obtient $h-u((\partial\rho/\partial t)+u\cdot\nabla\rho)=\nabla p$ ce qui donne la première équation de (1).

(ii) D'autre part l'équation (11) montre que

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega \rho u\cdot v\,dx=(-\nabla\cdot(u\rho u)+\mu\Delta u+\rho f,\ v)_{(H^{-1}(\Omega))^3\times(H_0^1(\Omega))^3}\in L^1(0,T).$$

Il en résulte que $\int_\Omega \rho u\cdot v\,dx\in C([0,T])$ et, en utilisant (10) avec $\varphi(x,t)=\psi(t)v(x)$ où maintenant $\psi(T)=0$ et $\psi(0)=1$, il en résulte que

$$\int_0^T -\frac{\partial}{\partial t}\left(\psi\int_\Omega \rho u\cdot v\,dx\right)dt=\int_\Omega \rho_0 u_0\cdot v\,dx.$$

Ce qui donne la condition initiale faible (7).

(iii) Dans [4] on avait supposé $f\in L^2(0,T;H)$ pour majorer uniformément les solutions approchées u^m à partir de l'inégalité

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho^m|u^m|^2dx+2\mu\int_\Omega|\nabla u^m|^2dx\leqq 2\sqrt{b}\left(\int_\Omega\rho^m|u^m|^2dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega|f|^2dx\right)^{1/2}.$$

En fait il suffit pour cela de supposer, comme ici, $f\in L^1(0,T;(L^2(\Omega))^3)$.

5. Démonstration du théorème 1. — (i) Les estimations de Kim [5] montrent que, quand les données sont régulières, la solution obtenue au théorème 2 vérifie, pour un certain $T_*>0$,

$$u\in L^2(0,T_*;(H^2(\Omega))^3)\cap L^\infty(0,T_*;V),\qquad \rho\frac{\partial u}{\partial t}\in L^2(Q_*).$$

Il en résulte que

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\nabla\cdot(\rho u)\in L^\infty(0,T_*;W^{-1,6}(\Omega)).\tag{12}$$

Le produit étant continu de $H^2(\Omega)\times W^{-1,6}(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$, on a

$$\frac{\partial\rho u}{\partial t}=\rho\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial t}\in L^2(0,T_*;(H^{-1}(\Omega))^3).\tag{13}$$

Donc $\rho u\in C([0,T_*];(H^{-1}(\Omega))^3)$, et la condition initiale faible (7) donne

$$\int_\Omega(\rho u)(0)\cdot v\,dx=\int_\Omega\rho_0u_0\cdot v\,dx.\tag{14}$$

(ii) D'après (12) on a $|\rho(t)-\rho_0|_{W^{-1,6}(\Omega)}\leqq ct$. Comme $u(t)$ est borné dans $(H^1(\Omega))^3$,

$$|\rho(t)u(t)-\rho_0u(t)|_{(W^{-1,3}(\Omega))^3}\leqq ct.$$

D'après (13) on a $|\rho(t)u(t)-(\rho u)(0)|_{(H^{-1}(\Omega))^3}\leqq c\sqrt{t}$. Finalement

$$|\rho_0u(t)-(\rho u)(0)|_{(H^{-1}(\Omega))^3}\leqq c\sqrt{t}.$$

En outre $u(t)$ est borné dans $(L^6(\Omega))^3$, donc $\rho_0u(t)$ l'est aussi, de sorte que $\rho_0u(t)\to(\rho u)(0)$ dans $(L^6(\Omega))^3$ faible quand $t\to0$. L'hypothèse $1/\rho_0\in L^{6/5}(\Omega)$ entraîne alors $u(t)\to a$ dans $L^1(\Omega)$ faible, où $a=(\rho u)(0)/\rho_0$.

Comme $u(t)$ est borné dans $(H^1(\Omega))^3$, cette convergence a lieu dans $(H^1(\Omega))^3$ faible. Comme $\rho(t)\to\rho_0$ dans $W^{-1,6}(\Omega)$, il en résulte que $(\rho u)(t)\to\rho_0a$ dans $(W^{-1,3}(\Omega))^3$ faible. Donc $(\rho u)(0)=\rho_0a$. La condition (14) donne alors

$$\int_\Omega\rho_0(a-u_0)\cdot v\,dx=0,\qquad\forall v\in V.$$

Par densité ceci est vérifié $\forall v \in \mathrm{H}$, donc pour $v = a - u_0$, ce qui donne $\rho_0 |a - u_0|^2 = 0$. En multipliant par $1/\rho_0$ il vient $a = u_0$. Par définition de a, il en résulte que $(\rho u)(0) = \rho_0 u_0$. □

Note remise le 6 février 1989, acceptée après révision le 23 mai 1989.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] A. V. KAZHIKHOV, Resolution of boundary value problems for non-homogeneous viscous fluids, *Doklady Akad. Nauk.*, 216, 1974, p. 1008-1010.

[2] O. LADYZHENSKAYA et V. A. SOLONNIKOV, Unique solvability of an initial and boundary value problem for viscous incompressible non-homogeneous fluids, *J. Soviet. Math.*, 9, 1978, p. 697-749.

[3] J.-L. LIONS, *On some problems connected with Navier-Stokes equations in nonlinear evolution equations*, M. C. CRANDALL éd., Academic Press, 1978.

[4] J. SIMON, Écoulement d'un fluide non homogène avec une densité initiale s'annulant, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 287, série A, 1978, p. 1009-1012.

[5] U. J. KIM, Weak solutions of an initial boundary value problem for an incompressible viscous fluid with non negative density, *S.I.A.M. J. Math. Anal.*, 18, n° 1, 1987, p. 89-96.

[6] L. TARTAR, *Topics in nonlinear analysis*, Publ. Math. d'Orsay, 1978.

[7] V. GIRAULT et P. A. RAVIART, *Finite elements methods for Navier-Stokes equations*, Springer-Verlag, 1986.

[8] J. SIMON, Non-homogeneous viscous incompressible fluids: existence of velocity, density and pressure, *S.I.A.M. J. Math. Anal.*, 1989 (à paraître).

[9] H. BEIRAO DE VEIGA, Diffusion on viscous fluids, Existence and asymptotic properties of solutions, *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, 10, 1983, p. 341-355.

[10] A. V. KAZHIKHOV et S. SMAGULOV, The correctness of boundary-value problems in a diffusion model of an inhomogeneous liquid, *Sov. Phys. Dokl.*, 22, 1977, p. 249-250.

Laboratoire d'Analyse numérique, Université Pierre-et-Marie-Curie et C.N.R.S.,
Tour n° 55-65, 5e étage, 4, *place Jussieu*, 75252 *Paris Cedex* 05.